

Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова
Физический факультет

*Кафедра квантовой теории
и физики высоких энергий*

Программа и задачи по курсу

”Квантовая теория”

для студентов I потока

Автор профессор Ю. М. Лоскутов

Москва 2004

Программа курса "Квантовая теория" для студентов физического факультета МГУ (I поток).

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ.

Понятие состояний. Векторы и совекторы состояний, пространство Гильберта. Условие нормировки. Разложение векторов состояний по базисным векторам, физический смысл коэффициентов разложения. Принцип суперпозиций состояний.

Понятие динамических переменных. Операторы как наблюдаемые и их свойства. Собственные значения и собственные векторы наблюдаемых. Дискретный и непрерывный спектр собственных значений, их физическая интерпретация. Свойства собственных векторов, их полнота; разложение векторов состояний по системе собственных векторов наблюдаемой, физический смысл коэффициентов разложения; нормировка собственных векторов в случаях дискретного и непрерывного спектра. Понятие о полном наборе наблюдаемых. Средние значения физических величин. Соотношение неопределенности для некоммутирующих наблюдаемых. Измерение физических величин, понятие идеального измерения.

Элементы теории представлений. Координатное, импульсное и матричное представление векторов состояний и наблюдаемых. Переход от одного представления к другому как результат унитарного преобразования. Волновая функция. Вероятностная интерпретация волновой функции; принцип причинности.

Изменение векторов состояний со временем. Основное уравнение квантовой теории. Оператор Гамильтона. Нерелятивистское приближение, уравнение Шредингера. Дискретный и непрерывный спектры. Стационарные состояния. Уравнение непрерывности, нормировка.

Гейзенберговская форма основного уравнения. Скобки Пуассона. Законы измерения и сохранения физических величин; связь интегралов движения с симметрией систем. Квантовый аналог теоремы вириала.

Представление взаимодействия. S-матричная формулировка квантовой теории; вероятность перехода системы из начального в заданное конечное состояние.

Чистые и смешанные состояния. Понятие чистого состояния. Измерение и редукция исходного состояния. Смешанные состояния, понятие о матрице плотности; вычисление физических величин с помощью матрицы плотности.

Соотношение квантовой и классической теории. Теоремы Эренфеста. Принцип соответствия.

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ.

Линейный гармонический осциллятор в координатном, импульсном и матричном представлениях и в представлении чисел заполнения.

Движение электронов в периодическом поле. Зонная структура энергетического спектра.

Общая теория движения в центрально-симметричном поле; собственные значения и собственные функции углового момента. Задача двух тел. Теория водородоподобного атома (с учетом движения ядра); матрица плотности; приближение неподвижного ядра. Энергетический спектр и собственные функции атома.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ МОМЕНТОВ

Собственные значения и собственные векторы моментов. Спин электрона, собственные векторы оператора спина. Уравнение Паули, свойства матриц Паули.

Векторное сложение скоростей, коэффициенты Клебша-Гордана. Шаровые спиноры.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

Квазиклассическое приближение, метод БВК. Туннельный эффект.

Теория возмущений для стационарных задач с дискретным спектром (при отсутствии и наличии вырождения); первое и второе приближения. Эффект Штарка. Теория возмущений при наличии близких уровней.

Вариационный метод Ритца.

Нестационарная теория возмущений; адиабатическое и внезапное включение возмущения. Плотность числа конечных состояний и вероятность перехода в единицу времени под действием периодического возмущения. Принцип детального равновесия.

Феноменологическая теория излучения. Интенсивность вынужденного и спонтанного излучения в дипольном приближении. Правила отбора. Понятие об излучении высших мультипольностей.

Упругое рассеяние частиц. Сечение рассеяния в первом борновском приближении, условие его применимости. Формула Резерфорда.

Метод парциальных волн. Оптическая теорема. Фазовый анализ. Переход к первому борновскому приближению. S- и T- матрицы рассеяния. Теорема Липпмана-Швингера. Простейшие графики Фейнмана.

ОСНОВЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

Ограниченность нерелятивистской квантовой теории, необходимость учета релятивистских эффектов. Уравнение Клейна-Фока-Гордона (КФГ) и его применимость к описанию частиц с нулевым спином. Положительно- и отрицательно- частотные решения. Плотность заряда и тока, условие нормировки; частицы и античастицы. Уравнение КФГ в электромагнитном поле, двузначность плотности заряда.

Уравнение Дирака. Уравнение Дирака в гамильтоновой и ковариантной формах, его применимость к описанию частиц со спином половина. Матрицы Дирака и их свойства. Уравнение непрерывности и нормировка волновой функции. Ковариантность уравнения Дирака относительно пространственно-временных вращений и P, T, C - преобразований, физические следствия. Тензорная размерность матриц Дирака. Введение разных типов взаимодействия частиц (скалярного, псевдоскалярного, векторного и т. д.).

Угловой, собственный и полный механический момент в теории Дирака. Решение уравнения Дирака для свободных частиц, предсказание позитронов; понятие об электрон-позитронном вакууме. Возможность рождения электрон-позитронных пар электрическим полем (на основе туннельного эффекта).

Преобразование Фолди-Вусайзена, одночастичное приближение, дрожание Шредингера.

Квазирелятивистское приближение уравнения Дирака во внешнем электромагнитном поле; спин-орбитальная, контактная и релятивистская поправки; переход к уравнению Паули. Тонкая структура энергетических уровней атома водорода. Лэмбовский сдвиг уровней (по Вельтону). Сверхтонкая структура. Нормальный и аномальный эффект Зеемана.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОГИХ ЧАСТИЦ

Тождественные частицы. Основное уравнение для системы частиц. Тождественные частицы, симметричные и антисимметричные состояния. Приближение невзаимодействующих частиц. Принцип Паули, принцип неразличимости тождественных частиц.

Обменные эффекты при рассеянии тождественных частиц со спином ноль и половина.

Теория двухэлектронных атомов, пара- и орто-состояния, обменные эффекты.

Многоэлектронные атомы, метод Хартри-Фока. Строение сложных атомов, система элементов Менделеева.

Статистический метод Томаса-Ферми.

Теория простейших молекул. Гетеро- и гомеополярные молекулы. Валентность. Ион молекулы водорода (адиабатическое приближение). Молекула водорода, силы Ван дер Ваальса. Молекулы с "возбужденными" атомами.

Вторичное квантование. Вторичное квантование в случае бозонов. Вторичное квантование в случае фермионов. Опертор Гамильтона в представлении вторичного квантования, несохранение числа частиц в заданном состоянии при включении взаимодействия.

Вторичное квантование свободного электромагнитного поля, фотоны. Операторы Гамильтона, импульса и собственного момента в представлении вторичного квантования. Вероятность переходов во вторично-квантованном электромагнитном поле. Интенсивности поглощения и излучения фотонов (в дипольном приближении).

Простейшие графики Фейнмана и расчет представляемых ими процессов.

Колебания в твердом теле, фононы.

Л И Т Е Р А Т У Р А

О С Н О В Н А Я

1. Д. И. Блохинцев. Основы квантовой механики. М. Наука. 1983г.
2. А. С. Давыдов. Квантовая механика. М. Физматгиз. 1973г.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Квантовая механика. М. Физматгиз. 1974.
4. А. А. Соколов, Ю. М. Лоскутов, И. М. Тернов. Квантовая механика. М. Просвещение. 1965.
5. Ф. А. Лунев, К. А. Свешников, Н. А. Свешников, О. Д. Тимофеевская, О. А. Хрусталева. Введение в квантовую теорию. Квантовая механика. Изд. МГУ. 1985.
6. А. Боум. Квантовая механика, основы и приложения. М. Мир. 1990.

Д О П О Л Н И Т Е Л Ь Н А Я

1. В. А. Фок. Начала квантовой механики. М. Наука. 1976г.
2. П. А. М. Дирак. Принципы квантовой механики. М. Физматгиз. 1960г.
3. А. Мессиа. Квантовая механика. Т. 1,2. М. Наука. 1978г.
4. З. Флюгге. Задачи по квантовой механике. Т. 1,2. Мир. 1974г.
5. В. М. Галицкий, Б. М. Карнаков, В. И. Коган. Задачи по квантовой механике. М. "Наука". 1992.

ПРОГРАММА-МИНИМУМ ПО КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

1. Правила квантования Бора-Зоммерфельда.
2. Уравнение Шредингера (в электромагнитном поле и при других взаимодействиях).
3. Нормировка волновой функции в случае дискретного и непрерывного спектров.
4. Собственные значения и собственные векторы наблюдаемых, полный набор наблюдаемых.
5. Соотношение неопределенностей для некоммутирующих наблюдаемых.
6. Изменение физических величин со временем; интегралы движения.
7. Вычисление физических величин.
8. Значение коэффициента прохождения через потенциальный барьер.
9. Чистые и смешанные состояния; определение матрицы плотности.
10. Координатное и импульсное представления наблюдаемых и векторов состояний.
11. Операторы координат, импульсов, моментов, гамильтона, скорости; коммутационные соотношения операторов моментов.
12. Квантовые скобки Пуассона.
13. Собственные функции* и собственные значения оператора квадрата углового момента и его проекции на выделенное направление.
14. Спектр энергии линейного гармонического осциллятора и атома водорода. Собственные функции осциллятора*.
15. Поправка к энергии в первом порядке теории возмущений (для задач с дискретным спектром при отсутствии и наличии вырождения).
- 16*. Выражение для вероятности перехода в единицу времени под действием периодического возмущения.
17. Выражение для дифференциального эффективного сечения рассеяния в первом борновском приближении.
- 18*. Оптическая теорема.
19. Уравнение Паули, свойства матриц Паули.
20. Интенсивность электромагнитного излучения в дипольном приближении.
- 21*. Уравнение Клейна-Фока-Гордона.
22. Уравнение Дирака (ковариантная* и гамильтонова формы).
- 23*. Свойства матриц Дирака.
- 24*. Понятие об электрон-позитронном вакууме и одночастичном приближении.

- 25*. Понятие о тонкой структуре и лэмбовском сдвиге.
 26. Понятие о нормальном и аномальном эффектах Зеемана.
 27. Уравнение для системы тождественных частиц; симметричные и антисимметричные состояния.
 28. Принцип неразличимости тождественных частиц.
 29*. Метод самосогласованного поля Хартри-Фока.
 30*. Перестановочные соотношения вторично-квантованных амплитуд для бозонов и фермионов.
 31*. Вторичное квантование свободного электромагнитного поля.
 32. Гамильтониан системы взаимодействующих тождественных частиц в представлении вторичного квантования.

Звездочкой помечены вопросы, обязательные для теоретиков и математиков.

ПЕРЕЧЕНЬ РЕКОМЕНДУЕМЫХ ЗАДАЧ ПО КУРСУ ”КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ”

ЗАДАЧИ К ВВЕДЕНИЮ

1. Найти изменение частоты фотона при его рассеянии на покоящемся электроне.
2. Пользуясь правилами квантования Бора-Зоммерфельда, найти энергетический спектр частицы в одномерной прямоугольной бесконечноглубокой потенциальной яме заданной ширины.
3. Оценить число уровней частицы в одномерной прямоугольной яме заданной глубины и ширины .
4. Пользуясь правилами Бора-Зоммерфельда, проквантовать
 - а) линейный гармонический осциллятор,
 - б) атом водорода,
 - в) частицу, падающую с небольшой высоты на поверхность Земли.
5. Дать детальное объяснение мысленному опыту Юнга.
6. Найти собственные значения и собственные функции частицы в одномерной прямоугольной яме заданной глубины и ширины.
7. Найти коэффициенты отражения и прохождения частиц, падающих на одномерный барьер заданной высоты и бесконечной ширины а) в случае, когда энергия падающих частиц выше уровня барьера и б) в случае, когда энергия падающих частиц ниже уровня барьера.
8. Найти коэффициенты отражения и прохождения частиц, падающих на одномерный прямоугольный барьер заданной высоты и ширины

а) в случае, когда энергия падающих частиц выше уровня барьера и б) в случае, когда энергия падающих частиц ниже уровня барьера.

9. Найти коэффициент отражения частиц от одномерной прямоугольной потенциальной ямы заданной глубины и ширины. При каком условии отражения не будет?

10. Объяснить возникновение контактной разности потенциалов двух металлов.

11. Оценить наименьшую энергию двухэлектронного атома.

12. Можно ли измерить собственный магнитный момент свободного электрона?

ЗАДАЧИ К ОСНОВНОМУ КУРСУ

1. Доказать, что для любых операторов \hat{A} , \hat{B} , \hat{C}

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}].$$

2. Доказать равенство

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$$

3. Доказать, что если $[\hat{A}, \hat{B}] = ic$, где c есть C -число, то

$$\exp(\hat{A} + \hat{B}) = \exp(\hat{A})\exp(\hat{B})\exp\left(\frac{-ic}{2}\right)$$

4. Найти разложение $(\hat{A} - \lambda\hat{B})^{-1}$ по степеням параметра λ .

5*. Доказать, что если $[\hat{A}, \hat{B}] = ic$, то

$$\frac{\partial \hat{F}(\hat{A}, \hat{B})}{\partial \hat{B}} = \frac{1}{c}[\hat{F}, \hat{A}], \quad \frac{\partial \hat{F}(\hat{A}, \hat{B})}{\partial \hat{A}} = -\frac{1}{c}[\hat{F}, \hat{B}]$$

6. Является ли оператор комплексного сопряжения а) линейным, б) эрмитовым?

7*. Доказать, что если $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ и $[\hat{A}, \hat{C}] = 0$, но $[\hat{B}, \hat{C}] \neq 0$, то спектр оператора \hat{A} вырожден.

8. Найти соотношение неопределенности для $\langle (\Delta \hat{F}(\hat{B}))^2 \rangle$ и $\langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle$, если $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar$.

9. Частица характеризуется состоянием, в котором проекция ее углового момента на некоторое направление максимальна. Чему равны средние значения квадратов проекции ее углового момента на перпендикулярные направления?

10. Найти собственные функции и собственные значения энергии плоского линейного осциллятора. Когда будет иметь место вырождение?

11. В некотором приближении взаимодействие нуклонов в ядре можно характеризовать потенциалом $U(r) = -U_0 \exp(-r/a)$. Найти волновую функцию основного состояния двухнуклонного ядра и уравнение, определяющее энергию его основного состояния.

12. Найти коэффициент отражения частиц от δ -образного потенциального барьера

$$U(x) = U_0 \delta(x), \quad U_0 > 0.$$

13*. Найти волновые функции и спектр энергии частицы в δ -образной потенциальной яме

$$U(x) = -U_0 \delta(x), \quad U_0 > 0.$$

14. Найти собственные функции и спектр энергии заряженной частицы в однородных и постоянных магнитном и электрическом полях, ортогональных друг другу.

15. В грубом приближении можно принять, что нуклоны в ядре подобны частицам в сферически-симметричной бесконечно глубокой потенциальной яме

$$U(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \infty & r > a \end{cases}$$

Найти волновые функции и спектр энергии нуклонов.

16*. Получить уравнение Шредингера в r -представлении для частицы в поле

$$U(x) = U_0 \cos(x/a).$$

17*. Найти волновую функцию нерелятивистской заряженной частицы в однородном постоянном электрическом поле.

18. Найти операторы координаты и импульса свободной частицы в гейзенберговском представлении.

19*. Найти операторы координаты и импульса линейного гармонического осциллятора в гейзенберговском представлении.

20. Указать интегралы движения частицы, если ее оператор Гамильтона имеет вид:

- а) $\hat{H} = \hat{T} + U(t)$,
- б) $\hat{H} = \hat{T} + U(x^2 + y^2)$,
- в) $\hat{H} = \hat{T} + U(z)$,
- г) $\hat{H} = \hat{T} + U(x, y^2 + z^2)$,

д) $\hat{H} = \hat{T} + U(xy)$.

21. Частица движется в магнитном поле, заданном вектор-потенциалом. Вычислить оператор, определяемый векторным произведением операторов скорости частицы.

22. Построить матрицу плотности для одного из атомов двухатомной молекулы, совершающей линейные продольные колебания.

23. Пользуясь представлением повышающих и понижающих операторов, найти для линейного гармонического осциллятора матричные элементы $x_{nn'}$, $p_{nn'}$, $(x^2)_{nn'}$, $(p^2)_{nn'}$.

24*. Состояние частицы в центрально-симметричном поле характеризуется вектором $|l, m\rangle = |1, 0\rangle$. Найти вероятности того, что проекция углового момента частицы на направление \vec{n} , составляющее с осью z угол θ , окажется равной 1, -1, 0. Вычислить средние значения $\langle(\vec{L}\vec{n})\rangle$ и $\langle(\vec{L}\vec{n})^2\rangle$.

25. Построить матрицу плотности электрона в водородоподобном атоме.

26* . Определить электростатический потенциал атома водорода в основном состоянии.

27*. Вычислить создаваемую угловым движением электрона напряженность магнитного поля в центре атома водорода.

28* . Найти матричный вид операторов $J_{1,2,3}$, J_{\pm} , J^2 для частиц со спином а) $j = 1/2$, б) $j = 3/2$.

29*. Проекция спина электрона на ось z равна $1/2$. Какова вероятность обнаружить ориентацию спина вдоль или против оси \vec{n} , составляющей с осью z угол θ ?

30. Найти собственные векторы и собственные значения оператора проекции спина электрона на направление \vec{n} , составляющее углы θ , φ , с координатными осями, в которых σ_z диагональна.

31*. Построить для электрона спиновую матрицу плотности. Какой вид она имеет в случае чистых состояний?

32*. Электрон находится в однородном нестатическом магнитном поле. Найти средние значения проекций спина на направления, перпендикулярные полю в момент времени t , если при $t = 0$ спиновая функция имела вид

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\delta} \cos \alpha \\ e^{i\delta} \sin \alpha \end{pmatrix}$$

33. Электрон находится в магнитном поле

$$\vec{H}_0 = (H_0 \sin \theta \cos \omega t, H_0 \sin \theta \sin \omega t, H_0 \cos \theta).$$

При $t = 0$ его спин был ориентирован параллельно полю. Найти вероятность того, что в момент t спин окажется ориентированным против поля.

34. Электрон находится в магнитном поле

$$H = (H_1 \cos \omega t, H_1 \sin \omega t, H_0).$$

При $t = 0$ спин электрона был ориентирован вдоль z . Найти вероятность того, что в момент t спин окажется ориентированным против оси z . Вычислить усредненную по времени вероятность ориентации спина против оси z ; исследовать резонансы. (Спин-орбитальным взаимодействием пренебречь).

35*. Найти зависимость тока холодной эмиссии электронов из металла от прилагаемого электрического поля.

36*. Эмпирический закон α -распада ядер имеет вид $N = N_0 \exp(-\lambda t)$. Оценить λ .

37*. Найти поправки к энергетическим уровням осциллятора, обусловленные слабой ангармоничностью $\hat{V} = \alpha x^3 + \beta x^4$.

38*. В первом порядке теории возмущений найти поправки к энергетическим уровням водородоподобного атома, обусловленные неточностью сферически-симметричного ядра.

39*. В первом порядке теории возмущений найти поправки к энергетическим уровням водородоподобного атома, связанные с релятивистскими поправками.

40. Одноэлектронный атом находится в основном состоянии. Найти вероятность его возбуждения за счет α -распада. Оценить вероятность ионизации.

41*. Одноэлектронный атом находится в основном состоянии. Найти вероятность его возбуждения при β -распаде. Оценить вероятность ионизации.

42. Плоский осциллятор характеризуется оператором Гамильтона

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \alpha x_1 x_2,$$

где \hat{H}_1 и \hat{H}_2 операторы, отвечающие колебаниям вдоль x_1 и x_2 . Рассматривая $\alpha x_1 x_2$ как возмущение, найти поправки к энергетическим уровням. Сравнить с точным решением.

43* . Найти расщепление спектральных линий атома водорода в "сильном" и "слабом" однородном статическом магнитном поле (эффект Зеемана).

44*. Заряженный линейный гармонический осциллятор находится в постоянном однородном электрическом поле, параллельном оси колебаний осциллятора. Рассматривая действие электрического поля как возмущение, найти поправки к энергетическим уровням. Сравнить с точным решением.

45*. На свободный заряженный линейный гармонический осциллятор, находящийся в основном состоянии, внезапно накладывается постоянное однородное электрическое поле, параллельное оси его колебаний. Найти вероятности возбуждений осциллятора.

46*. Найти расщепление энергетического уровня $n=2$ атома водорода в сильном однородном постоянном электрическом поле (эффект Штарка).

47. Атом водорода в состоянии с $n=2$ находится в однородных постоянных магнитном и электрическом полях, ортогональных друг другу. Пренебрегая спин-орбитальным взаимодействием, найти расщепление энергетического уровня.

48. Атом водорода в состоянии с $n=2$ находится в однородных постоянных магнитном и электрическом полях, параллельных друг другу. Пренебрегая спин-орбитальным взаимодействием, найти расщепление энергетического уровня.

49. Газ состоит из атомов водорода в основном состоянии. Найти (без учета спинов) его магнитную восприимчивость.

50. Тяжелая заряженная частица пролетает мимо атома водорода. Найти вероятность его возбуждения в случаях близких и далеких пролетов.

51* . Найти расщепление энергетического уровня $2S_{1/2}$ атома водорода в слабом однородном постоянном электрическом поле.

52*. Вычислить магнитный момент атома водорода (для $n=2$) в а) слабом однородном постоянном электрическом поле, б) сильном электрическом поле.

53. Вариационным методом найти энергию первого возбужденного состояния атома водорода и соответствующую этому состоянию волновую функцию.

54*. Вариационным методом найти волновую функцию и энергию основного состояния атома гелия (без учета спинов).

55*. Найти спектрально-угловое распределение и поляризацию спонтанного дипольного и электрического квадрупольного излучения линейного гармонического осциллятора.

56. Найти спектрально-угловое распределение и поляризацию спонтанного дипольного излучения заряженной жесткой двухатомной молеку-

лы.

57. Найти интенсивности дипольного излучения атома водорода при переходах с уровней $2p$ и $3p$ на уровень $1s$; сравнить их.

58. В первом борновском приближении найти дифференциальные и полные сечения упругого рассеяния частиц в полях

а) $U = g^2 \frac{e^{-\alpha r}}{r},$

б) $U = U_0 e^{-\alpha^2 r^2},$

в) $U = U_0 e^{-\alpha r},$

г) $U = \begin{cases} U_0 > 0 & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$

59. В первом борновском приближении найти дифференциальное сечение упругого рассеяния частиц в поле $U = U_0 \frac{a^2}{r^2}$.

60. В первом борновском приближении найти сечение рассеяния заряженных частиц на атоме водорода в основном состоянии.

61*. В первом борновском приближении найти дифференциальное сечение упругого рассеяния заряженных частиц на неподвижном ядре с распределенной плотностью заряда ($\rho_e = \rho_e(r)$).

62*. Найти фазы рассеяния частиц в поле $U = U_0 \frac{a^2}{r^2}$ и получить условие борновского приближения. Найти дифференциальное сечение рассеяния на малые углы.

63*. Найти сечение рассеяния медленных частиц в поле

а) $U = \begin{cases} U_0 > 0 & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$

б)* $U = \begin{cases} -U_0 < 0 & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$

В случае а) особо рассмотреть случай "жесткой" сферы. При каком условии результат будет соответствовать борновскому приближению?

64. Найти сечение рассеяния быстрых частиц на непроницаемой среде радиуса a .

65. Исследовать рассеяние s -волны в поле

$$U = \frac{\hbar^2 \lambda}{m_0 a} \delta(r - a).$$

66. Убедиться, что в борновском приближении амплитуда и сечение рассеяния вперед не зависят от энергии падающих частиц.

67. Убедиться, что в случае предельно низких энергий падающих частиц основной вклад в сечение рассеяния дает s -волна.

68. Доказать, что 16 элементов Γ_i , построенных из γ -матриц Дирака, независимы.

69. Доказать, что если матрица $\hat{\Gamma}$ коммутирует со всеми γ^μ -матрицами, то она пропорциональна единичной матрице.

70. Доказать равенство

$$(\vec{\sigma}\vec{a})(\vec{\sigma}\vec{b}) = (\vec{a}\vec{b}) + i(\vec{\sigma}[\vec{a}\vec{b}]).$$

71*. Убедиться, что комбинация $A^\mu \equiv \bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\psi$ обладает свойствами псевдовектора.

72. Доказать, что проекция спина свободного электрона на его импульс является интегралом движения.

73*. Доказать, что при движении электрона в однородном постоянном магнитном поле интегралами движения являются операторы

$$\hat{\Pi}_{\parallel} = \frac{(\vec{\sigma}\vec{P})}{m_0c} \quad \hat{\Pi}_{\perp} = \hat{s}_3 + \rho_2 \frac{[\vec{\sigma}\vec{P}]_3}{m_0c}$$

74. Найти оператор скорости \hat{v} свободной дираковской частицы и его собственные значения. Вычислить среднее значение \hat{v} в состоянии с положительной энергией.

75*. Вычислить магнитный момент атома водорода в состоянии $|n, j, l, m_j\rangle$ с учетом диамагнетизма. Найти диамагнитную восприимчивость атома.

76. Вычислить квадрупольный момент атома водорода в состоянии $|n, j, l, m_j\rangle$.

77. Магнитное поле $\vec{H} = (0, 0, H_0)$ заполняет полупространство $x > 0$. Пучек нерелятивистских поляризованных нейтронов в состоянии $|\vec{p}, m_s\rangle$ падает в плоскости (xz) на границу раздела. Найти коэффициент отражения нейтронов от границы и углы отражения и преломления при $m_s = \pm 1/2$.

78. Найти электростатический потенциал двухэлектронного атома в основном состоянии.

79. Найти диамагнитную восприимчивость атома гелия в основном состоянии.

80*. Найти обусловленную движением ядра поправку к энергии основного состояния пара- и орто-гелия.

81. В приближении неподвижного ядра вычислить кулоновскую и обменную энергии пара- и орто-гелия, если состояния электронов заданы векторами $|1, 0, 0\rangle$ и $|2, 0, 0\rangle$ или $|2, 1, 0\rangle$.

82*. Учитывая обменные эффекты, найти в первом борновском приближении дифференциальные эффективные сечения рассеяния скалярных и спинорных частиц, взаимодействующих по закону:

- а) $U = \frac{e^2}{r}$,
 б)* $U = U_0 \frac{a^2}{r^2}$,
 в) $U = U_0 e^{-\alpha^2 r^2}$,
 г) $U = \frac{g^2}{r} e^{-\alpha r}$,
 д) $U = U_0 e^{-\alpha r}$,

83*. Учитывая обменные эффекты, найти полное эффективное сечение рассеяния медленных а) α -частиц и б)* нейтронов.

84*. Сечение рассеяния медленных нейтронов на нейтронах в триплетном состоянии $\sigma_t = 4\pi a_t^2 = 2 \cdot 10^{-24}$ см², а в синглетном состоянии $\sigma_s = 4\pi a_s^2 = 80 \cdot 10^{-24}$ см². Найти полное сечение рассеяния, если в начальном состоянии спины нейтронов одного пучка параллельны их импульсам, а спиновая функция нейтронов другого пучка имеет вид

$$\chi = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \theta/2 \\ e^{i\varphi/2} \sin \theta/2 \end{pmatrix}$$

85*. Показать, что при рассеянии медленных спинорных частиц в триплетном состоянии основной вклад в сечение рассеяния дает фаза с $l=1$.

86*. Пользуясь моделью Томаса-Ферми, оценить в атоме

- а)* среднее расстояние между электронами.
 б)* среднюю энергию кулоновского взаимодействия двух электронов.
 в)* среднюю кинетическую энергию электрона.
 г)* энергию ионизации.
 д) среднюю величину скорости электронов в атоме.
 е) среднюю величину углового момента электрона.

87* Пользуясь моделью Томаса-Ферми, доказать, что все электроны положительного многоэлектронного иона атома заключены внутри сферы конечного радиуса.

88. Пользуясь моделью Томаса-Ферми, выразить полную энергию многоэлектронного нейтрального атома через

- а) плотность распределения электрического заряда,
 б) через безразмерную функцию φ уравнения Томаса-Ферми и ее первую производную.

89. Полагая приближенное решение уравнения Томаса-Ферми для нейтрального многоэлектронного атома $\varphi(x) = (1 + \alpha x)^{-2}$ и подчиняя ее точному условию нормировки, определить α и вычислить энергию атома.

90. Вариационным методом получить выражение электрической плотности нейтрального атома в модели Томаса-Ферми, взяв в качестве пробной функции $\rho_e(x) = \alpha e^{-x}/x^3$, где $x \equiv (r/a)^{1/2}$, а α и a — параметры. Найти энергию атома (сравнить ее с результатом задачи 89).

91*. Получить матричный вид операторов рождения и уничтожения частиц в заданном квантовом состоянии

а) в случае бозонов.

б) в случае фермионов.

92. Убедиться, что если функцию числа бозонов в различных квантовых состояниях представить в виде $f(N) = \prod_k \delta_{N_k, N_k^0}$, где N_k^0 — заданное число частиц в k -ом квантовом состоянии, то операторы рождения и уничтожения можно задать в форме

$$\hat{c}^+ = \sqrt{N_k} \exp\left(-\frac{\partial}{\partial N_k}\right), \quad \hat{c} = \sqrt{N_k + 1} \exp\left(\frac{\partial}{\partial N_k}\right).$$

93*. Доказать, что в случае фермионов $\hat{N}_k^s = \hat{N}_k$, а в случае бозонов $(\hat{c}_k^+)^s (\hat{c}_k)^s = \hat{N}_k (\hat{N}_k - 1) \cdots (\hat{N}_k - s + 1)$, где s — целое число.

94*. Доказать, что собственные значения оператора $\hat{N}_k = \hat{C}_k^+ \hat{C}_k$ являются целыми неотрицательными числами.

95*. Пользуясь оператором Гамильтона в представлении вторичного квантования, показать, что электроны двухэлектронного атома в основном состоянии находятся в синглетном состоянии.

96*. Пользуясь вторично-квантованной теорией электромагнитного поля, найти интенсивности спонтанного и индуцированного излучения и поглощения заряженного линейного осциллятора в дипольном приближении.

97. Определить время жизни нерелятивистского позитрона в свинце.

98. Проквантовать вещественное скалярное поле. Убедиться, что спин и заряд соответствующих этому полю частиц равны нулю.

99. Пользуясь диаграммной техникой, построить матричный элемент, отвечающий эффекту комптоновского рассеяния, и найти сечение рассеяния.

Предлагаемые задачи могут быть использованы для семинарских занятий и составления преподавателем контрольных домашних заданий. Звездочкой помечены задачи, обязательные для всех; они же включаются и в экзаменационные билеты.