

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

физический факультет

Вопросы к зачету по квантовой теории, 1-й поток (май 2018 г.)

<http://hep.phys.msu.ru>

Теоретические вопросы

1. Гильбертово пространство. Базис. Унитарные, эрмитовы и проекционные операторы. Их физический смысл.
2. Спектральное разложение эрмитова оператора. Случай непрерывного спектра. Определение функции от оператора. Теоремы о коммутаторах эрмитовых операторов и их собственных векторах.
3. Результаты измерения наблюдаемой. Матрица плотности, ее свойства, условие нормировки. Слабые измерения, условная матрица плотности.
4. Чистое состояние. Матрица плотности чистого состояния. Описание чистого состояния с помощью вектора гильбертова пространства. Принцип суперпозиции, его обоснование.
5. Совместимые и несовместимые наблюдаемые. Полный набор наблюдаемых. Соотношение неопределенностей.
6. Пространство состояний составной системы. Нахождение матрицы плотности подсистемы. Примеры всех возможных комбинаций чистых и смешанных состояний у системы и подсистем.
7. “Парадоксы” квантовой механики. “Парадокс” ЭПР (Эйнштейна, Подольского, Розена). “Парадокс” GHZ (Greenberger, Horne, Zeilinger).
8. Представления Гайзенберга и Шредингера, связь между ними, формальные решения уравнений Гайзенберга и Шредингера.
9. Стационарные состояния. Симметрии и интегралы движения. Оператор эволюции и его свойства. Выражение для оператора эволюции в случае гамильтониана, зависящего от времени.
10. Координатное и импульсное представление. Их связь. Операторы трансляции в координатном и импульсном пространстве.
11. Общие свойства спектра при одномерном движении. Дискретный спектр, непрерывный спектр, кратность вырождения. Осцилляционная теорема. Четный потенциал.
12. Непрерывный спектр и одномерное рассеяние. Рассеяние волновых пакетов.
13. Периодический потенциал, спектр и волновые функции. Периодический потенциал и конечный отрезок периодического потенциала.
14. Квазиклассическое приближение. Условие применимости. Условие сшивания в точках поворота.
15. Правила квантования Бора-Зоммерфельда. Коэффициент туннелирования. Условия применимости.

16. Теория момента. Матричные элементы оператора момента. Спин. Орбитальный момент.
17. Сложение моментов. Коэффициенты Клебша-Гордона. Старшие вектора.
18. Матричные элементы скалярных и векторных операторов.
19. Центральное-симметричное поле. Радиальное уравнение Шредингера, граничное условие в нуле.
20. Координатное и импульсное представление в 3-мерном случае. Поток вероятности, уравнение непрерывности. Падение на центр.

Задачи

Формулы для операторов

1. Вычислить $f(b + \vec{a} \cdot \vec{\sigma})$.
2. Вычислить $\exp(i\varphi \vec{n} \vec{\sigma} / 2) \vec{b} \vec{\sigma} \exp(-i\varphi \vec{n} \vec{\sigma} / 2)$.
3. Вычислить $\exp(\xi \vec{n} \vec{\sigma} / 2) \vec{b} \vec{\sigma} \exp(\xi \vec{n} \vec{\sigma} / 2)$.
4. Известно, что $[\hat{A}, \hat{B}] = 7i\hat{B}$ и $\exp(z\hat{A})B \exp(-z\hat{A}) = i\hat{B}$. Найти все возможные значения z .
5. Вычислить $\exp(i\varphi \hat{l}_y) \hat{p}_x \hat{z} \exp(-i\varphi \hat{l}_y)$.
6. Вычислить

$$\exp(i\varphi \hat{l}_x) \cdot \sin(a\hat{p}_y) \cdot \exp(-i\varphi \hat{l}_x)$$
7. Одномерный гармонический осциллятор. Вычислить

$$\exp(\eta \hat{a} \hat{a}^+) \cdot \hat{p} \cdot \exp(-\eta \hat{a} \hat{a}^+)$$
8. Одномерный гармонический осциллятор. Вычислить

$$\exp(\eta(\hat{a} \hat{a} - \hat{a}^+ \hat{a}^+)) \cdot \hat{x} \cdot \exp(\eta(\hat{a}^+ \hat{a}^+ - \hat{a} \hat{a}))$$
9. Двумерный осциллятор. Вычислить

$$\exp(\xi(\hat{a}_x^+ \hat{a}_y - \hat{a}_y^+ \hat{a}_x)) \cdot \hat{p}_y \cdot \exp(-\xi(\hat{a}_x^+ \hat{a}_y - \hat{a}_y^+ \hat{a}_x))$$
10. Двумерный осциллятор. Вычислить

$$\exp(\xi(\hat{a}_y^+ \hat{a}_z^+ - \hat{a}_y \hat{a}_z)) \cdot \hat{z} \cdot \exp(-\xi(\hat{a}_y^+ \hat{a}_z^+ - \hat{a}_y \hat{a}_z))$$

Теория измерений

11. Волновая функция спина 1/2 равна

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

($|a|^2 + |b|^2 = 1$). Куда направлен спин ($\theta=?$, $\varphi=?$). Найти вероятности попадания в верхний и нижний пучок в приборе Штерна-Герлаха с полем, ориентированным по оси $\vec{n}'(\theta', \varphi')$. Найти среднее значение проекции спина на ось $\vec{n}'(\theta', \varphi')$. Показать, что ответы для среднего значения и вероятностей согласованы.

12. Волновая функция спина $1/2$ равна

$$|\psi\rangle = \exp[i(\varphi/2)(-\sin\theta\sigma_1 + \cos\theta\sigma_2)] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Куда направлен спин ($\theta=?$, $\varphi=?$). Найти вероятности попадания в верхний и нижний пучок в приборе Штерна-Герлаха с полем, ориентированным по оси $\vec{n}'(\theta', \varphi')$. Найти среднее значение проекции спина на ось $\vec{n}'(\theta', \varphi')$. Показать, что ответы для среднего значения и вероятностей согласованы.

13. Пучок частиц со спином $1/2$ в состоянии

$$\hat{\rho} = (1/2) + (1/2) \xi \vec{\sigma} \cdot \vec{n}(\theta, \varphi)$$

влетает в прибор Штерна-Герлаха с магнитным полем, ориентированным по оси z . Найти отношение интенсивностей верхнего и нижнего пятна. Как надо направить поле, чтобы это отношение стало максимальным? Чему равно это максимальное отношение?

14. Матрица плотности спина $1/2$ равна

$$\rho = \begin{pmatrix} a & b^* \\ b & 1 - a \end{pmatrix}$$

Найти направление поляризации и степень поляризации. Найти вероятности попадания в верхний и нижний пучок в приборе Штерна-Герлаха с полем, ориентированным по оси $\vec{n}'(\theta', \varphi')$. Найти среднее значение проекции спина на ось $\vec{n}'(\theta', \varphi')$. Показать, что ответы для среднего значения и вероятностей согласованы.

15. Пучок частиц со спином $1/2$, ориентированным по оси y , влетает в прибор Штерна-Герлаха с полем по оси z . На выходе из прибора верхний пучок пролетает область магнитного поля H_z , время пролета τ . После этого пучки сводят вместе и направляют в прибор Штерна-Герлаха с полем по оси y . Найти отношение интенсивностей пятен в последнем приборе.

Осциллятор

16. Матрица плотности одномерного гармонического осциллятора имеет вид

$$\hat{\rho} = \frac{1}{3}|0\rangle\langle 0| + \frac{2}{3}|1\rangle\langle 1| + \frac{i}{6}|0\rangle\langle 1| - \frac{i}{6}|1\rangle\langle 0|$$

Найти среднее значение и дисперсию энергии, среднее значение и дисперсию импульса в этом состоянии.

17. Матрица плотности одномерного гармонического осциллятора имеет вид

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{3}{4}|1\rangle\langle 1| + \frac{1}{8}|0\rangle\langle 1| + \frac{1}{8}|1\rangle\langle 0|$$

Найти среднее значение и дисперсию энергии, среднее значение и дисперсию координаты в этом состоянии.

18. Одномерный гармонический осциллятор. Вычислить

$$\langle \alpha | \hat{x} \hat{p} | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{x} | \alpha \rangle \langle \alpha | \hat{p} | \alpha \rangle$$

$$\langle \alpha | \hat{p} \hat{x} | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{p} | \alpha \rangle \langle \alpha | \hat{x} | \alpha \rangle$$

19. Одномерный гармонический осциллятор. Вычислить $\langle \alpha | \hat{x} | \beta \rangle$, $\langle \alpha | \hat{p} | \beta \rangle$. Как убывает ответ с ростом $|\alpha - \beta|$?

20. Одномерный гармонический осциллятор. В координатном представлении найти явный вид волновой функции для когерентного состояния $|\alpha\rangle$.

21. Одномерный гармонический осциллятор. В импульсном представлении найти явный вид волновой функции для когерентного состояния $|\alpha\rangle$.

22. Одномерный гармонический осциллятор. Вычислить

$$\langle n | \hat{x}^4 | n \rangle \quad \langle n | \hat{x}^3 | m \rangle$$

23. Одномерный гармонический осциллятор. Вычислить

$$\langle n | \hat{p}^4 | n \rangle \quad \langle n | \hat{p}^3 | m \rangle$$

24. Матрица плотности осциллятора имеет вид

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\alpha n) (1 - \exp(-\alpha)) |n\rangle \langle n|$$

(здесь $\alpha = \hbar\omega/kT$). Найти среднее значение и дисперсию энергии, среднее значение и дисперсию координаты.

25. Матрица плотности осциллятора имеет вид

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\alpha n) (1 - \exp(-\alpha)) |n\rangle \langle n|$$

(здесь $\alpha = \hbar\omega/kT$). Найти среднее значение и дисперсию энергии, среднее значение и дисперсию импульса.

26. Волновая функция осциллятора имеет вид

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\alpha\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\beta\rangle$$

(здесь $\langle \alpha | \beta \rangle \ll 1$). Найти среднее значение и дисперсию координаты.

27. Волновая функция осциллятора имеет вид

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\alpha\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\beta\rangle$$

(здесь $\langle \alpha | \beta \rangle \ll 1$). Найти среднее значение и дисперсию импульса.

28. Найти уровни энергии и волновые функции системы

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} + \frac{qy^2}{2} + \alpha xy$$

29. Найти уровни энергии и волновые функции системы

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{k_1 x_1^2}{2} + \frac{k_2 x_2^2}{2} + q(x_1 - x_2)^2$$

30. Найти уровни энергии и волновые функции системы

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2) + \hbar\omega\sigma_3/2 + \hbar\gamma a(\sigma_1 + i\sigma_2)/2 + \hbar\gamma a^\dagger(\sigma_1 - i\sigma_2)/2$$

состоящей из гармонического осциллятора и двухуровневой системы.

Одномерное движение

31. Найти уровни энергии в потенциале:

$$V(x < -a) = 0, \quad V(-a < x < a) = -U_0 + V_0\delta(x + a) + V_0\delta(x - a), \quad V(x > a) = 0.$$

32. Найти уровни энергии в потенциале:

$$V(x < -a) = 0, \quad V(-a < x < a) = -U_0 + V_0\delta(x), \quad V(x > a) = 0.$$

33. Найти уровни энергии в потенциале:

$$V(x) = U_0\delta(x) - V_0\delta(x + a) - V_0\delta(x - a).$$

34. Найти уровни энергии в потенциале:

$$V(x < -a) = \infty, \quad V(-a < x < -b) = 0, \quad V(-b < x < b) = U_0, \quad V(b < x < a) = 0, \\ V(x > a) = \infty.$$

35. Найти уровни энергии в потенциале:

$$V(x < 0) = \infty, \quad V(0 < x < a) = 0, \quad V(a < x < b) = U_0 + V_0\delta(x - a), \quad V(x > b) = \infty.$$

36. Найти уровни энергии в потенциале:

$$V(x < 0) = \infty, \quad V(0 < x < a) = -U_0 + V_0\delta(x - a), \quad V(x > a) = 0.$$

37. Найти коэффициенты отражения и прохождения для потенциала:

$$V(x < 0) = 0, \quad V(x > 0) = U_0 + V_0\delta(x).$$

38. Найти расположение разрешенных зон для одномерной решетки Дирака

$$V(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_0\delta(x - na)$$

39. Найти расположение нижней разрешенной зоны для одномерной решетки Дирака

$$V(x) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_0\delta(x - na)$$

Квазиклассика

40. Найти в квазиклассическом приближении уровни энергии в потенциале $V(x < 0) = \infty$, $V(x > 0) = kx^2/2$. Сравнить с точным ответом.

41. Найти в квазиклассическом приближении уровни энергии в потенциале $V(x < 0) = \infty$, $V(x > 0) = kx$.

42. Найти в квазиклассическом приближении коэффициент надбарьерного отражения на потенциале $V(x < 0) = 0$, $V(0 < x < a) = U_0x/a$, $V(a < x) = U_0$. Сравнить с точным ответом при $a \rightarrow 0$. Проанализировать ответ в классическом пределе.

43. Найти зависимость времени жизни α -активного ядра от энергии вылетающей α -частицы.

44. Найти зависимость тока холодной эмиссии от величины приложенного электрического поля.

- 45.* Оценить вероятность рождения электрон-позитронной пары в постоянном электрическом поле \mathcal{E} .
- 46.* Оценить вероятность рождения пары фотонов в гравитационном поле черной дыры, ускорение падения равно κ .

Центрально-симметричное поле

47. Найти уровни энергии для сферической оболочки $V(r) = -V_0\delta(r - a)$.
48. Найти уровни энергии в сферически-симметричном потенциале $V(r < a) = -U_0 + V_0\delta(r - a)$, $V(r > a) = 0$.
49. Найти уровни энергии в шаровом слое $V(r < a) = \infty$, $V(a < r < b) = 0$, $V(b < r < c) = A/r^2$, $V(r > c) = \infty$.
50. Найти уровни энергии в шаровом слое $V(r < a) = \infty$, $V(a < r < b) = 0$, $V(b < r < c) = U_0 + V_0\delta(r - b)$, $V(r > c) = \infty$.
51. Найти уровни энергии в сферически-симметричном потенциале $V(r < a) = -U_0$, $V(r > a) = A/r^2$.
52. Найти решение стационарного уравнения Шредингера для частицы в потенциале $V(r) = A/r^2$. В какой области вокруг начала координат волновая функция с хорошей степенью точности равна нулю?
53. Найти среднее значение кинетической энергии, потенциальной энергии, центробежного потенциала и величины $1/r^3$ для атома водорода, который находится в состоянии $|\psi_{nlm}\rangle$.

Теория момента

54. Вычислить

$$\langle J'M' | J_x J_y | JM \rangle \quad \langle J'M' | J_y J_x | JM \rangle$$

55. Пусть

$$|\psi\rangle = \exp(i\varphi J_y) |JM\rangle$$

найти

$$\langle \psi | J_x J_z | \psi \rangle$$

56. Система двух спинов $1/2$ находится в состоянии

$$|\psi\rangle = \exp(i\varphi S_x) | \uparrow \uparrow \rangle$$

Чему равны вероятности $P_{S=1, S_z=1}$, $P_{S=1, S_z=0}$, $P_{S=1, S_z=-1}$, $P_{S=0, S_z=0}$?

57. Система двух спинов $1/2$ находится в состоянии $S = 0$. Оба спина пропускают сквозь прибор Штерна-Герлаха с полем, ориентированным по оси $\vec{n}(\theta, \varphi)$. Найти вероятности всех 4 возможных результатов (вв, вн, нв, нн).

58. Гамильтониан системы двух спинов $1/2$ имеет вид

$$\hat{H} = -2\mu_1 s_z^{(1)} H_z - 2\mu_2 s_z^{(2)} H_z + \alpha \vec{s}^{(1)} \cdot \vec{s}^{(2)}$$

Найти уровни энергии и соответствующие волновые функции.

59. Волновая функция системы двух спинов имеет вид

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}|\uparrow\uparrow\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|\uparrow\downarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{4}}|\downarrow\uparrow\rangle$$

Найти матрицы плотности первого и второго спинов и вероятность того, что полный спин равен 0.

60. Матрица плотности системы двух спинов имеет вид

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4}|\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| + \frac{1}{2}|\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + \frac{1}{4}|\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + i\frac{1}{8}|\uparrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| - i\frac{1}{8}|\downarrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow|$$

Найти матрицы плотности первого и второго спинов и вероятность того, что полный спин равен 1.

61. Волновая функция системы двух спинов имеет вид

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp(i\alpha S_y)|\uparrow\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\exp(i\beta S_x)\frac{(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)}{\sqrt{2}}$$

Найти матрицы плотности первого и второго спинов и вероятность того, что полный спин равен 1.

62. Сложение двух спинов 1/2. Вычислить

$$\begin{aligned} \langle S = 1, S_z = 0 | s_x^{(2)} | S = 1, S_z = -1 \rangle \\ \langle S = 1, S_z = 1 | s_y^{(2)} | S = 0, S_z = 0 \rangle \\ \langle S = 0, S_z = 0 | s_z^{(1)} | S = 1, S_z = 0 \rangle \end{aligned}$$

63. Сложение орбитального момента и спина. Вычислить

$$\begin{aligned} \langle j = l + 1/2, m_j = m + 1/2 | s_y | j = l + 1/2, m_j = m - 1/2 \rangle \\ \langle j = l - 1/2, m_j = m - 1/2 | s_x | j = l + 1/2, m_j = m + 1/2 \rangle \\ \langle j = l + 1/2, m_j = m + 1/2 | s_z | j = l - 1/2, m_j = m + 1/2 \rangle \end{aligned}$$

64. Сложение орбитального момента и спина. Вычислить

$$\begin{aligned} \langle j = l + 1/2, m_j = m + 1/2 | l_x | j = l + 1/2, m_j = m - 1/2 \rangle \\ \langle j = l - 1/2, m_j = m - 1/2 | l_y | j = l + 1/2, m_j = m + 1/2 \rangle \\ \langle j = l - 1/2, m_j = m + 1/2 | l_z | j = l + 1/2, m_j = m + 1/2 \rangle \end{aligned}$$

65. Частица со спином 1/2 находится в состоянии $|jlm_j\rangle$. Найдите направление спина $\vec{n}(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi})$ в точке с координатами (r, θ, φ) .

66. Сложение моментов $J_1 = 2$ и $J_2 = 1$. Вычислить

$$|J = 1, M = 1\rangle \quad |J = 1, M = 0\rangle \quad |J = 1, M = -1\rangle$$

67. Сложение моментов $J_1 = 2$ и $J_2 = 2$. Найти все старшие вектора с определенными значениями J

68. Сложение моментов $J_1 = 1$ и $J_2 = 1$. Вычислить все коэффициенты Клебша Гордона.

69. Найти собственные значения и базис собственных векторов для полного спина $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3$ в системе трех спинов $1/2$.

Динамика

70. Спин $1/2$ помещен в магнитное поле

$$\vec{H}(t) = (H_1 \cos \Omega t, H_1 \sin \Omega t, H_0)$$

В момент времени $t = 0$ спин был ориентирован вверх. Найти вероятность переворота спина в момент времени t . Указать условие резонанса.

71. Одномерный гармонический осциллятор в момент времени $t = 0$ находится в основном состоянии. Затем он на интервале $0 < t < t_0$ подвергается воздействию постоянной силы $f(t) = f_0$. Найти волновую функцию в момент времени t и вероятность обнаружить его на n -ом уровне в момент времени t .

72. Линейный гармонический осциллятор в начальный момент времени находится в состоянии $|0\rangle$. При $0 < t < 2\pi/\Omega$ на него действует классическая сила $f(t) = f_0 \sin(\Omega t)$. Найти волновую функцию $|\psi(t)\rangle$ и вероятность пребывания в состоянии $|n\rangle$ в произвольный момент времени t .

73. Одномерный гармонический осциллятор в момент времени $t = 0$ находился в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$. Найти волновую функцию в момент времени t . Вычислить средние значения координаты и импульса и их дисперсию в момент времени t .

74. Гамильтониан системы двух частиц со спином $1/2$ имеет вид

$$\hat{H} = -2\mu_0(s_z^{(1)} - s_z^{(2)})H_z$$

Найти вероятность того, что полный спин системы равен нулю в момент времени t , если в момент времени $t = 0$ спин первой частицы был ориентирован вдоль оси x , а второй — против оси x .

75. Симметричный двумерный гармонический осциллятор в начальный момент времени находится в состоянии

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|10\rangle - \frac{i}{\sqrt{3}}|01\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|00\rangle$$

Найти волновую функцию $|\psi(t)\rangle$, среднее значение и дисперсию x, y, p_x, p_y в произвольный момент времени t .

76. Линейный гармонический осциллятор в начальный момент времени находится в состоянии

$$\rho(t=0) = \frac{2}{3}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|0\rangle\langle 1| + \frac{1}{3}|1\rangle\langle 1|$$

Найти матрицу плотности, среднее значение и дисперсию координаты и импульса в произвольный момент времени t .

77. Спин $1/2$ в начальный момент времени находится в состоянии

$$\rho(t=0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi\vec{n}\vec{\sigma}$$

Он помещен в однородное магнитное поле, ориентированное по оси z . Найти матрицу плотности, направление и степень поляризации в произвольный момент времени t .

78. Решить уравнение Гайзенберга для оператора рождения a^+ в одномерном гармоническом осцилляторе.
79. Решить уравнение Гайзенберга для операторов $\hat{A}_i(t)$, где $\hat{A}_i(0) = \sigma_i$, $\hat{H} = \hbar\omega\sigma_1$.
80. Решить уравнение Гайзенберга для трех компонент момента J_x, J_y, J_z , гамильтониан системы $\hat{H} = -\mu_0 J_y H_y$.