Квантовая механика. 1-ой поток. 2017 г.
Редакция от 21.05.17
http://hep.phys.msu.ru

Attention! Уравнение Дирака будет подробно разбираться в осеннем семестре и вопросы по нему будут обязательной составной частью заключительного экзамена.

Список задач дается в максимальном варианте, для разных групп он может уточняться семинаристом.

Теоретические вопросы

1. Комбинационный принцип и матричная механика Гейзенберга. Физические величины как эрмитовые операторы в гильбертовом пространстве.

2. Динамическая схема квантовой механики. Представления Гейзенберга и Шредингера. Переход от одного представления к другому. Оператор эволюции $U(t_2, t_1)$, его общий вид и основные свойства.

3. Принцип соответствия между классической и квантовой механикой, каноническое квантование.Теоремы Эренфеста.

4. Квантовомеханическая теория измерения. Спектр и средние значения физических величин. Измерение наблюдаемых с чисто дискретным невырожденным спектром и чистые состояния квантовой системы. Полный набор наблюдаемых.

5. Вероятностная интерпретация результатов измерения некоммутирующих величин. Соотношение "неопределенностей"для дисперсий некоммутирующих величин. Простейшие ЭПР-"парадоксы"и их обьяснение.

6. Совокупность чистых состояний квантовой системы как гильбертово пространство, его основные свойства. Принцип суперпозиции чистых состояний, его обоснование. Спектральное разложение эрмитового оператора и функций от него. Квантовомеханическая интерпретация дискретного и непрерывного спектров оператора наблюдаемой.

7. Изоморфизм представлений гильбертова пространства. Эквивалентность любого представления матричному. Переход от одного представления к другому как унитарное преобразование, его шредингеровская и гейзенбергова формы. Взаимосвязь унитарных и канонических преобразований.

8. Координатное и импульсное представления. Волновая функция, ее вероятностная интерпретация. Переход от одного представления к другому.

9. Симметрии и интегралы движения в квантовой механике. Вырождение уровней энергии при наличии некоммутирующих интегралов движения.

10. Стационарные состояния, их основные свойства. Эволюция во времени состояний из дискретной и непрерывной частей энергетического спектра.

11. Матрицы плотности и смешанные состояния. Средние значения физических величин в смешанном состоянии. Основные свойства матриц плотности. Матрицы плотности подсистем, обьяснение координатного и спинового ЭПР-"парадоксов"с их помощью.

12. Квантование гармонического осциллятора методом операторов рождения-уничтожения. Когерентные состояния, их основные свойства.

13. Общие свойства уравнения Шредингера для нерелятивистской частицы в потенциальном поле. Уравнение непрерывности. Вариационный принцип для стационарного ур. Шредингера.

14. Квантовая механика частицы в потенциальном поле для одного пространственного измерения. Основные свойства дискретного спектра. Специфика одномерной потенциальной ямы с равновысокими стенками. Одномерное рассеяние на потенциале с регулярными асимптотиками $V(\pm\infty) = V_{\pm}$.

15. Одномерное уравнение Шредингера с периодическим потенциалом. Теорема Флоке, функции Блоха, квазиимпульс и зоны Бриллюэна.

16. Квазиклассическое (ВКБ) приближение, условие применимости. Квазиклассические волновые функции, их продолжение через точки поворота. Правило квантования Бора-Зоммерфельда.

17. Туннельный эффект в ВКБ-приближении. Волновые функции и разность энергий двух нижних уровней в потенциале вида "mexican hat". Рождение пар за счет флуктуаций вакуума во внешних полях.

18. Частица в центрально-симметричном поле. Разделение переменных. Орбитальный момент, собственные функции и собственные значения l^2 и l_z. Природа целочисленности орбитального момента. Конечный поворот как унитарное преобразование координатной волновой функции.

19. Радиальное ур-ние Шредингера. Граничное условие при $r = 0$, его обоснование. Общие свойства энергетического спектра и волновых функций связанных состояний в центрально-симметричном поле. Падение на центр. ВКБ-приближение для радиального уравнения.

20. Угловой момент и конечные повороты в общем случае. Перестановочные соотношения для компонент момента. Спектр операторов $J^2,\ J_z$. Матричные элементы компонент момента в базисе собственных векторов операторов $J^2,\ J_z$. Операторы спина частицы, матричные элементы и собственные вектора. Спин $1/2$, основные свойства.

21. Векторное сложение двух моментов. Коэффициенты векторного сложения, их основные свойства и физический смысл. Коэффициенты сложения двух спинов $1/2$ и спина $1/2$ с орбитальным моментом l.

22. Операторы конечных вращений. Матрицы конечных вращений в параметризации Эйлера.

23. Скаляр и вектор в квантовой механике, их коммутаторы с компонентами полного углового момента системы как следствие законов преобразования при конечных поворотах. Показать, что скалярное произведение двух векторов есть скаляр, а векторное — (псевдо)вектор.

24. Правила отбора для матричных элементов от скаляра и вектора по состояниям $|JM\rangle$ с фиксированным полным моментом и его третьей проекцией. Показать, что для скаляра $\langle J'M'|\, A\, |JM\rangle = \delta_{JJ'}\delta_{MM'} \langle J|\, A\, |J\rangle$, для вектора $\langle JM|\vec{A}|JM'\rangle = \langle JM|\vec{J}|JM'\rangle \times \langle J|\vec{A}\vec{J}|J\rangle / J(J+1)$.

25. Пространственная инверсия в квантовой механике. Четность орбитального состояния. Тензоры и псевдотензоры (на примере скаляра и вектора). Правила отбора по четности.

Задачи

1. Найти дисперсию координаты и импульса для гармонического осциллятора, находящегося на n-ом энергетическом уровне. Что в ответе является чисто квантовым эффектом?

2. Найти уровни энергии и вектора состояния одномерного гармонического осциллятора в постоянном внешнем поле

$$H = \hbar\omega(a^+a + 1/2) + f^*a + fa^+$$

3. Найти средние значения и дисперсии координаты и импульса осциллятора и корреляторы $\langle xp\rangle - \langle x\rangle\langle p\rangle$, $\langle px\rangle - \langle p\rangle\langle x\rangle$ в когерентном состоянии.

4. Найти явный вид эволюции по времени когерентного состояния гармонического осциллятора.

5. Исходя из условия минимизации соотношения "неопределенностей"между координатой и импульсом, найти явный вид волновых функций для когерентных состояний в координатном и импульсном представлениях.

6. Одномерный гармонический осциллятор в момент времени $t = 0$ находится в основном энергетическом состоянии. Затем при $t > 0$ он подвергается воздействию внешней силы $f(t)$. Найти явный вид оператора эволюции и вероятность обнаружить осциллятор в n-ом возбужденном энергетическом состоянии как функцию t.

7. Взаимодействие осциллятора с двухуровневой системой описывается гамильтонианом

$$H = \hbar\omega a^+a + \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_3 + \hbar\gamma(a\sigma_+ + a^+\sigma_-)$$

   где $\sigma_\pm = (\sigma_1 \pm i\sigma_2)/2$, σ_i – матрицы Паули. Найти стационарные состояния и уровни энергии в такой системе, среднее значение и дисперсию энергии осциллятора в этих состояниях.

8. Взаимодействие осциллятора с двухуровневой системой описывается гамильтонианом

$$H = \hbar\omega a^+a + \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_3 + \hbar\gamma(a\sigma_+ + a^+\sigma_-)$$

   где $\sigma_\pm = (\sigma_1 \pm i\sigma_2)/2$, σ_i – матрицы Паули. Найти как функцию времени вероятность одновременно обнаружить двухуровневую систему в верхнем энергетическом состоянии и осциллятора — в состоянии с m квантами, если при $t = 0$ двухуровневая система находилась в нижнем состоянии, а осциллятор — в состоянии с n квантами.

9. Найти уровни энергии и общее число связанных состояний в одномерной симметричной потенциальной яме $V(x) = -V_0 + (\hbar^2/2m)\ \Omega\delta(x)$, $|x| < a$, $V(x) = 0, |x| > a$. Как будут вести себя уровни при $\Omega \to \pm\infty$?

10. Найти число дискретных уровней энергии в потенциале $V(x) = -V_0[\delta(x-a) + \delta(x+a)]$ в зависимости от параметров потенциала.

11. Найти уровни энергии и общее число связанных состояний в одномерной потенциальной яме шириной a с разновысокими стенками $V_1 < V_2$.

12. Найти коэффициенты прохождения-отражения и соответствующие фазовые сдвиги при прохождении частицы через потенциал вида $V(x) = -V_0 + (\hbar^2/2m)\ \Omega\delta(x)\ ,\ |x| < a,\ V(x) = 0, |x| > a$. Что будет при $\Omega \to \pm\infty$?

13. Найти вероятность туннелирования частицы сквозь одномерный потенциальный барьер $V(x) = V_0 + (\hbar^2/2m)\ \Omega\delta(x)\ ,\ |x| < a,\ V(x) = 0, |x| > a$ (энергия частицы меньше V_0). Что будет при $\Omega \to \pm\infty$?

14. Найти расположение зон Бриллюэна для одномерной решетки Дирака $V(x) = V_0 \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-na)\ ,\ V_0 > 0$.

15. Найти расположение нижних зон Бриллюэна для одномерной решетки Дирака $V(x) = V_0 \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-na)\ ,\ V_0 < 0$.

16. Методом ВКБ найти уровни энергии одномерного гармонического осциллятора.

17. В ВКБ-приближении найти уровни энергии частицы массы m в потенциальном поле вида $V(z) = \infty,\ z < 0, V(z) = mgz,\ z > 0$. Сравнить с точным ответом.

18. В ВКБ-приближении найти среднее положение и разность энергий нижних уровней частицы массы m в потенциальной яме вида $V(x) = -Ax^2\ , |x| \le a\ , V(x) = 0\ , |x| > a$.

19. В рамках ВКБ-приближения оценить вероятность образования электрон-позитронной пары в постоянном электрическом поле за счет флуктуаций вакуума.

20. В рамках ВКБ-приближения определить энергетическую зависимость вероятности рождения пар фотонов в гравитационном поле черной дыры вблизи поверхности Шварцшильда за счет флуктуаций вакуума, если гравитационное ускорение над сферой Шварцшильда равно χc^2.

21. Пусть гамильтониан зависит от λ как от параметра и $H(\lambda)\,|\psi(\lambda)\rangle = E(\lambda)\,|\psi(\lambda)\rangle$. Показать, что для нормированных на единицу векторов $|\psi(\lambda)\rangle$ имеет место соотношение $\frac{\partial E(\lambda)}{\partial\lambda} = \langle\psi(\lambda)|\,\frac{\partial H(\lambda)}{\partial\lambda}\,|\psi(\lambda)\rangle$.

22. Доказать, что в состоянии с определенной энергией в центральносимметричном поле $V(r) = g * r^\gamma$ средние значения кинетической и потенциальной энергий связаны соотношением: $2\langle T\rangle = \gamma\langle V\rangle$ (теорема вириала).

23. С помощью оценки Баргмана описать основные свойства спектра связанных состояний в сферически-симметричном потенциале со степенной асимптотикой в нуле и на бесконечности.

24. Радиальная волновая функция стационарного состояния частицы массы m в исчезающем на бесконечности центральном поле $U(r)$ имеет вид $R(r) = r(1-\alpha r)e^{-\beta r}$. Найти значение орбитального момента в этом состоянии, его энергию и явный вид потенциала $U(r)$.

25. Найти S-уровни энергии в сферически-симметричной яме: $V(r) = -V_0 + (\hbar^2/2m)\delta(r-a)\ , r \le a\ ,\ V(r) = 0\ ,\ r > a$. Как будут вести себя уровни при $\Omega \to \pm\infty$?

26. Нуклон-нуклонный потенциал на расстояниях порядка 1-2 Фм аппроксимируется функцией $V(r) = -A\exp(-r/\lambda)\ ,\ \lambda = \hbar/m_\pi c$. Найти константу связи A, если энергия связи нуклонов в дейтроне равна 2,23 МэВ.

27. Найти уровни энергии связанных состояний в потенциале $V(r) = -A/r - B/r^2$ и кратность их вырождения.

28. Найти квантовые числа и кратность вырождения дискретных уровней энергии для водородоподобного иона в условиях, когда движение электрона ограничено непроницаемой плоскостью $z = 0$, а ядро находится в начале координат $\vec{r} = 0$.

29. В какое состояние перейдет основное $1s$-состояние водородоподобного иона в условиях, когда движение электрона ограничено непроницаемой плоскостью $z = 0$, а ядро перемещается из точки с координатами $\vec{r} = (0, 0, a)$, расположенной высоко над плоскостью $a \gg a_B$ в начало координат $\vec{r} = 0$.

30. В какое состояние перейдет $2s$-уровень водородоподобного иона в условиях, когда движение электрона ограничено непроницаемой плоскостью $z = 0$, а ядро перемещается из точки с координатами $\vec{r} = (0, 0, a)$, расположенной высоко над плоскостью $a \gg a_B$ в начало координат $\vec{r} = 0$.

31. В какие состояния перейдут $2p$-уровни водородоподобного иона с $m = 0$ и $m = \pm 1$ в условиях, когда движение электрона ограничено непроницаемой плоскостью $z = 0$, а ядро перемещается из точки с координатами $\vec{r} = (0, 0, a)$, расположенной высоко над плоскостью $a \gg a_B$, в начало координат $\vec{r} = 0$.

32. Состояние конфайнмента квантовой частицы внутри замкнутой полости Ω с границей Σ задается энергетическим функционалом

$$E[\psi] = \int_\Omega d\vec{r} \ \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\vec{\nabla}\psi|^2 + U(\vec{r}) \ |\psi|^2 \right] + \ \frac{\hbar^2}{2m} \int_\Sigma d\sigma \ \lambda(\vec{r}) \ |\psi|^2 \ ,$$

$U(\vec{r})$ — потенциал внутри Ω, а поверхностный член $\int_\Sigma$ задает контактное взаимодействие частицы с границей полости. Считая $\lambda(\vec{r})$ вещественной функцией, найти вид УШ внутри полости, граничное условие для волновой функции частицы на поверхности полости, и выполнение условие “невылетания” частицы из полости.

33. Водородоподобный ион находится в начале координат замкнутой сферической полости Ω с граничным условием на электронную волновую функцию

$$[\vec{n}\vec{\nabla} + \lambda]\psi\Big|_\Sigma = 0 \ ,$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к границе полости Σ. Показать, что при выполнении условия $Ze^2 = \hbar^2\lambda/m$, где m - масса электрона, при любом радиусе полости основное состояние иона и его ВФ будут совпадать с $1s$-состоянием свободного иона.

34. Вычислить среднее значение $\langle r^{-1} \rangle$, $\langle r^{-2} \rangle$, $\langle r^{-3} \rangle$ в состоянии с определенной энергией E_n и орбитальным моментом l в кулоновом поле притяжения.

35. Найти среднее значение и дисперсию расстояния между электроном и ядром для водородоподобного атома в n-ом возбужденном состоянии.

36. Найти среднее значение различных компонент квадрупольного момента $Q_{ik} = x_i x_k - 1/3\delta_{ik}\vec{r}^2$ для заряженной бесспиновой частицы, находящейся в кулоновом поле притяжения в стационарном состоянии с фиксированными n, l, m.

37. Найти уровни энергии бесспиновой заряженной частицы в постоянном однородном магнитном поле напряженности $\mathcal{H}$ в состоянии с фиксированным значением проекций импульса и орбитального момента на направление поля.

38. Определить энергетический спектр заряженной бесспиновой частицы, движущейся в однородном электрическом и однородном магнитном полях, направления напряженностей которых взаимно перпендикулярны.

39. Найти уровни энергии заряженного сферически симметричного осциллятора, помещенного в постоянное однородное магнитное поле напряженности $\mathcal{H}$, для состояний с фиксированной проекцией орбитального момента на направление поля.

40. Найти спектр оператора углового момента для планарной (пространственно-двумерной) системы.

41. Установить соотношение между дисперсиями проекций J_x , J_y момента в состоянии с фиксированным значением J_z.

42. Вычислить $f[aE+\vec{b}\vec{\sigma}]$, где E - единичная матрица, $\vec{\sigma}$ - матрицы Паули, а a и $\vec{b}$ - произвольные действительные число и вектор.

43. Найти спектр энергий заряженной частицы со спином $1/2$ и магнитным моментом $\vec{\mu} = \mu_0\vec{s}$ в постоянном однородном магнитном поле $\mathcal{H}$.

44. Частица массы m со спином $1/2$ и магнитным моментом $\vec{\mu} = \mu_0\vec{s}$ движется в неоднородном магнитном поле $\vec{\mathcal{H}} = \{0, -ky, \mathcal{H}_0 + kz\}$. Найти операторы $\vec{r}(t)$, $\vec{p}(t)$. Определить средние значения и дисперсию координат частицы, если в начальный момент времени частица находилась в координатном состоянии $\psi = \varphi(\vec{r})e^{ip_0x/\hbar}$, где $\varphi(\vec{r})$ действительная квадратично-интегрируемая функция, и чистом спиновом состоянии χ. Прецессией магнитного момента пренебречь.

45. Найти спиновые волновые функции системы двух частиц со спином $1/2$, которые являются собственными функциями операторов $\vec{s}^2 = (\vec{s}_1+\vec{s}_2)^2$, $s_z = (s_1)_z + (s_2)_z$.

46. Протон и нейтрон находятся в синглетном состоянии по полному спину. Найти вероятности обнаружить у них одинаковые или различные значения проекции спина на ось $\vec{n}$ при одновременном измерении.

47. Выразить проекционные операторы на синглетное и триплетное состояния для системы из двух частиц со спином $1/2$ через скалярное произведение их спинов $\vec{s}_1\vec{s}_2$.

48. Две частицы со спином $1/2$ находятся в состоянии $|\Psi\rangle = \exp(i\varphi_1 s_{1x})\exp(i\varphi_2 s_{2y})\ |\uparrow\uparrow\rangle$. Найти угол между ориентацией спинов частиц и вероятности обнаружить частицы в синглетном и триплетном состояниях по полному спину.

49. Гамильтониан системы двух взаимодействующих частиц со спином $1/2$, помещенных в постоянное однородное магнитное поле, имеет вид

$$H = -(\mu_1\vec{s}_1 + \mu_2\vec{s}_2)\vec{\mathcal{H}} + \alpha\ \vec{s}_1\vec{s}_2\ .$$

Найти уровни энергии системы.

50. Найти вид операторов спина 1 в представлении, где S_z диагональна. Показать, что операторы спина 1 могут быть представлены также в виде $(S_l)_{jk} = i(\hbar)\epsilon_{jlk}$. Найти унитарное преобразование, связывающее эти два представления.

51. Определить отношение интенсивностей пятен на экране в опыте Штерна-Герлаха для поляризованного по оси z пучка частиц спина 1 и магнитным моментом $\vec{\mu} = \mu_0\vec{s}$, если отклоняющее магнитное поле ориентировано под углом θ к оси z.

52. Частица со спином 1/2 находится в поле центральных сил. Найти волновые функции этой частицы, являющиеся одновременно собственными функциями трех коммутирующих операторов: $j_z = l_z + s_z$, j^2, l^2.

53. Частица со спином 1/2 находится в состоянии с квантовыми числами (j, l, s, j_z). Найти вероятности различных значений проекций орбитального и спинового моментов частицы l_z и s_z при их одновременном измерении в этом состоянии.

54. Частица со спином 1/2 находится в состоянии с квантовыми числами (j, l, s, j_z). Покажите, что направление спина (т.е. направление оси, вдоль которой проекция с достоверностью принимает значение 1/2) различно в различных точках пространства. Найти связь полярных углов этой оси с направлением радиус-вектора.

55. Найти средние значения различных компонент квадрупольного момента $Q_{ik} = x_i x_k - 1/3\delta_{ik}\vec{r}^2$ для частицы со спином 1/2 в состоянии с фиксированными $j_z = l_z + s_z$, j^2, l^2.

56. Найти средние значения компонент полного магнитного момента частицы $\vec{\mu} = \mu_l \vec{l} + \mu_s \vec{s}$ в состоянии $|jlsm_j\rangle$ с определенными значениями $j, l, s, j_z = m_j$.

57. Равновесное состояние одномерного гармонического осциллятора в термостате с температурой T описывается матрицей плотности $\rho = \exp(-\beta H)/Tr(\exp(-\beta H))$, где H — гамильтониан осциллятора, $\beta = 1/kT$. Найти среднюю энергию осциллятора и ее дисперсию в этом состоянии. Вывести формулу Планка.

58. Система двух частиц со спином 1/2 находится в чистом состоянии

$$|\Psi\rangle = (|\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle)/\sqrt{3}.$$

Найти матрицы плотности смешанных состояний, в которых находится каждая из частиц по-отдельности.

59. Установить, при каких условиях на параметры α, β, γ матрица

$$\rho = \begin{pmatrix} 1/2 + \alpha & \beta - i\gamma \\ \beta + i\gamma & 1/2 - \alpha \end{pmatrix}$$

будет спиновой матрицей плотности. Найти средние значения всех трех компонент спина в этом состоянии.

60. Определить отношение интенсивности пятен на экране в опыте Штерна-Герлаха, если отклоняющее градиентное магнитное поле ориентировано по оси $\vec{n}$, имеющей сферические углы θ и φ, а состояние пучка электронов в представлении, где матрица s_z диагональна, описывается матрицей плотности:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1/2 + \alpha & \beta - i\gamma \\ \beta + i\gamma & 1/2 - \alpha \end{pmatrix}.$$

Установить, при каких θ и φ отношение интенсивностей будет максимально (минимально).