

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

физический факультет

Квантовая теория, 1-й поток (май 2016 г.)

<http://hep.phys.msu.ru>

Задачи к зачету

*Формулы для операторов*

1. Вычислить  $f(b + \vec{a} \cdot \vec{\sigma})$ .
2. Вычислить  $\exp(i\varphi \vec{n} \vec{\sigma} / 2) \vec{b} \vec{\sigma} \exp(-i\varphi \vec{n} \vec{\sigma} / 2)$ .
3. Вычислить  $\exp(\xi \vec{n} \vec{\sigma} / 2) \vec{b} \vec{\sigma} \exp(\xi \vec{n} \vec{\sigma} / 2)$ .
4. Известно, что  $[\hat{A}, \hat{B}] = 13i\hat{B}$  и  $\exp(z\hat{A})B \exp(-z\hat{A}) = -i\hat{B}$ . Найти все возможные значения  $z$ .

5. Вычислить  $\exp(i\varphi \hat{l}_x) \hat{p}_y \hat{z} \exp(-i\varphi \hat{l}_x)$ .

6. Вычислить

$$\exp(i\varphi \hat{l}_y) \cdot \sin(a\hat{p}_z) \cdot \exp(-i\varphi \hat{l}_y)$$

7. Одномерный гармонический осциллятор. Вычислить

$$\exp(\alpha \hat{a} \hat{a}^+) \cdot \hat{p} \cdot \exp(-\alpha \hat{a} \hat{a}^+)$$

8. Одномерный гармонический осциллятор. Вычислить

$$\exp(\alpha(\hat{a} \hat{a} - \hat{a}^+ \hat{a}^+)) \cdot \hat{x} \cdot \exp(\alpha(\hat{a}^+ \hat{a}^+ - \hat{a} \hat{a}))$$

9. Двумерный осциллятор. Вычислить

$$\exp(\xi(\hat{a}_x^+ \hat{a}_y - \hat{a}_y^+ \hat{a}_x)) \cdot \hat{p}_y \cdot \exp(-\xi(\hat{a}_x^+ \hat{a}_y - \hat{a}_y^+ \hat{a}_x))$$

10. Двумерный осциллятор. Вычислить

$$\exp(\xi(\hat{a}_y^+ \hat{a}_z^+ - \hat{a}_y \hat{a}_z)) \cdot \hat{z} \cdot \exp(-\xi(\hat{a}_y^+ \hat{a}_z^+ - \hat{a}_y \hat{a}_z))$$

*Теория измерений*

11. Волновая функция спина 1/2 равна

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

( $|a|^2 + |b|^2 = 1$ ). Куда направлен спин ( $\theta=?$ ,  $\varphi=?$ ). Найти вероятности попадания в верхний и нижний пучок в приборе Штерна-Герлаха с полем, ориентированным по оси  $\vec{n}'(\theta', \varphi')$ . Найти среднее значение проекции спина на ось  $\vec{n}'(\theta', \varphi')$ . Показать, что ответы для среднего значения и вероятностей согласованы.

12. Волновая функция спина  $1/2$  равна

$$|\psi\rangle = \exp[i(\varphi/2)(-\sin\theta\sigma_1 + \cos\theta\sigma_2)] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Куда направлен спин ( $\theta=?$ ,  $\varphi=?$ ). Найти вероятности попадания в верхний и нижний пучок в приборе Штерна-Герлаха с полем, ориентированным по оси  $\vec{n}'(\theta', \varphi')$ . Найти среднее значение проекции спина на ось  $\vec{n}'(\theta', \varphi')$ . Показать, что ответы для среднего значения и вероятностей согласованы.

13. Пучок частиц со спином  $1/2$  в состоянии

$$\hat{\rho} = (1/2) + (1/2)\xi\vec{\sigma} \cdot \vec{n}(\theta, \varphi)$$

влетает в прибор Штерна-Герлаха с магнитным полем, ориентированным по оси  $z$ . Найти отношение интенсивностей верхнего и нижнего пятна. Как надо направить поле, чтобы это отношение стало максимальным? Чему равно это максимальное отношение?

14. Матрица плотности спина  $1/2$  равна

$$\rho = \begin{pmatrix} a & b^* \\ b & 1-a \end{pmatrix}$$

Найти направление поляризации и степень поляризации. Найти вероятности попадания в верхний и нижний пучок в приборе Штерна-Герлаха с полем, ориентированным по оси  $\vec{n}'(\theta', \varphi')$ . Найти среднее значение проекции спина на ось  $\vec{n}'(\theta', \varphi')$ . Показать, что ответы для среднего значения и вероятностей согласованы.

15. Пучок частиц со спином  $1/2$ , ориентированным по оси  $y$ , влетает в прибор Штерна-Герлаха с полем по оси  $z$ . На выходе из прибора верхний пучок пролетает область магнитного поля  $H_z$ , время пролета  $\tau$ . После этого пучки сводят вместе и направляют в прибор Штерна-Герлаха с полем по оси  $y$ . Найти отношение интенсивностей пятен в последнем приборе.

### Осциллятор

16. Матрица плотности одномерного гармонического осциллятора имеет вид

$$\hat{\rho} = \frac{1}{3}|0\rangle\langle 0| + \frac{2}{3}|1\rangle\langle 1| + \frac{i}{6}|0\rangle\langle 1| - \frac{i}{6}|1\rangle\langle 0|$$

Найти среднее значение и дисперсию энергии, среднее значение и дисперсию импульса в этом состоянии.

17. Матрица плотности одномерного гармонического осциллятора имеет вид

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{3}{4}|1\rangle\langle 1| + \frac{1}{8}|0\rangle\langle 1| + \frac{1}{8}|1\rangle\langle 0|$$

Найти среднее значение и дисперсию энергии, среднее значение и дисперсию координаты в этом состоянии.

18. Одномерный гармонический осциллятор. Вычислить

$$\langle \alpha | \hat{x} \hat{p} | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{x} | \alpha \rangle \langle \alpha | \hat{p} | \alpha \rangle$$

$$\langle \alpha | \hat{p} \hat{x} | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{x} | \alpha \rangle \langle \alpha | \hat{p} | \alpha \rangle$$

19. Одномерный гармонический осциллятор. Вычислить  $\langle \alpha | \hat{x} | \beta \rangle$ ,  $\langle \alpha | \hat{p} | \beta \rangle$ . Как убывает ответ с ростом  $|\alpha - \beta|$  ?
20. Одномерный гармонический осциллятор. В координатном представлении найти явный вид волновой функции для когерентного состояния  $|\alpha\rangle$ .
21. Одномерный гармонический осциллятор. В импульсном представлении найти явный вид волновой функции для когерентного состояния  $|\alpha\rangle$ .

22. Одномерный гармонический осциллятор. Вычислить

$$\langle n | \hat{x}^4 | n \rangle \quad \langle n | \hat{x}^3 | m \rangle$$

23. Одномерный гармонический осциллятор. Вычислить

$$\langle n | \hat{p}^4 | n \rangle \quad \langle n | \hat{p}^3 | m \rangle$$

24. Матрица плотности осциллятора имеет вид

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\alpha n) (1 - \exp(-\alpha)) |n\rangle \langle n|$$

(здесь  $\alpha = \hbar\omega/kT$ ). Найти среднее значение и дисперсию энергии, среднее значение и дисперсию координаты.

25. Матрица плотности осциллятора имеет вид

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\alpha n) (1 - \exp(-\alpha)) |n\rangle \langle n|$$

(здесь  $\alpha = \hbar\omega/kT$ ). Найти среднее значение и дисперсию энергии, среднее значение и дисперсию импульса.

26. Волновая функция осциллятора имеет вид

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\alpha\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\beta\rangle$$

Полагая  $\langle \alpha | \beta \rangle \ll 1$ , найти среднее значение и дисперсию координаты.

27. Волновая функция осциллятора имеет вид

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\alpha\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\beta\rangle$$

Полагая  $\langle \alpha | \beta \rangle \ll 1$ , найти среднее значение и дисперсию импульса.

28. Найти уровни энергии и волновые функции системы

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} + \frac{qy^2}{2} + \alpha xy$$

29. Найти уровни энергии и волновые функции системы

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{k_1 x_1^2}{2} + \frac{k_2 x_2^2}{2} + q(x_1 - x_2)^2$$

30. Найти уровни энергии и волновые функции системы

$$H = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2) + \hbar\omega\sigma_3/2 + \hbar\gamma a(\sigma_1 + i\sigma_2)/2 + \hbar\gamma a^\dagger(\sigma_1 - i\sigma_2)/2$$

состоящей из гармонического осциллятора и двухуровневой системы.

*Одномерное движение*

31. Найти уровни энергии в потенциале:

$$V(x < -a) = 0, \quad V(-a < x < a) = -U_0 + V_0\delta(x + a) + V_0\delta(x - a), \quad V(x > a) = 0.$$

32. Найти уровни энергии в потенциале:

$$V(x < -a) = 0, \quad V(-a < x < a) = -U_0 + V_0\delta(x), \quad V(x > a) = 0.$$

33. Найти уровни энергии в потенциале:

$$V(x) = U_0\delta(x) - V_0\delta(x + a) - V_0\delta(x - a).$$

34. Найти уровни энергии в потенциале:

$$V(x < -a) = \infty, \quad V(-a < x < -b) = 0, \quad V(-b < x < b) = U_0, \quad V(b < x < a) = 0, \\ V(x > a) = \infty.$$

35. Найти уровни энергии в потенциале:

$$V(x < 0) = \infty, \quad V(0 < x < a) = 0, \quad V(a < x < b) = U_0 + V_0\delta(x - a), \quad V(x > b) = \infty.$$

36. Найти уровни энергии в потенциале:

$$V(x < 0) = \infty, \quad V(0 < x < a) = -U_0 + V_0\delta(x - a), \quad V(x > a) = 0.$$

37. Найти коэффициенты отражения и прохождения для потенциала:

$$V(x < 0) = 0, \quad V(x > 0) = U_0 + V_0\delta(x).$$

38. Найти расположение разрешенных зон для одномерной решетки Дирака

$$V(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_0\delta(x - na)$$

39. Найти расположение нижней разрешенной зоны для одномерной решетки Дирака

$$V(x) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_0\delta(x - na)$$

*Квазиклассика*

40. Найти в квазиклассическом приближении уровни энергии в потенциале  $V(x < 0) = \infty$ ,  $V(x > 0) = kx^2/2$ . Сравнить с точным ответом.

41. Найти в квазиклассическом приближении уровни энергии в потенциале  $V(x < 0) = \infty$ ,  $V(x > 0) = kx$ .

42. Найти в квазиклассическом приближении коэффициент надбарьерного отражения на потенциале  $V(x < 0) = 0$ ,  $V(0 < x < a) = U_0x/a$ ,  $V(a < x) = U_0$ . Сравнить с точным ответом при  $a \rightarrow 0$ . Проанализировать ответ в классическом пределе.

43. Найти зависимость времени жизни  $\alpha$ -активного ядра от энергии вылетающей  $\alpha$ -частицы.

44. Найти зависимость тока холодной эмиссии от величины приложенного электрического поля.

45. Оценить вероятность рождения электрон-позитронной пары в постоянном электрическом поле  $\mathcal{E}$ .
46. Оценить вероятность рождения пары фотонов в гравитационном поле черной дыры, ускорение падения равно  $\kappa$ .

*Центрально-симметричное поле*

47. Найти уровни энергии для сферической оболочки  $V(r) = -V_0\delta(r - a)$ .
48. Найти уровни энергии в сферически-симметричном потенциале  $V(r < a) = -U_0 + V_0\delta(r - a)$ ,  $V(r > a) = 0$ .
49. Найти уровни энергии в шаровом слое  $V(r < a) = \infty$ ,  $V(a < r < b) = 0$ ,  $V(b < r < c) = A/r^2$ ,  $V(r > c) = \infty$ .
50. Найти уровни энергии в шаровом слое  $V(r < a) = \infty$ ,  $V(a < r < b) = 0$ ,  $V(b < r < c) = U_0 + V_0\delta(r - b)$ ,  $V(r > c) = \infty$ .
51. Найти уровни энергии в сферически-симметричном потенциале  $V(r < a) = -U_0$ ,  $V(r > a) = A/r^2$ .
52. Найти решение стационарного уравнения Шредингера для свободной частицы с определенным значением орбитального момента. В какой области вокруг начала координат волновая функция с хорошей степенью точности равна нулю?
53. Найти среднее значение кинетической энергии, потенциальной энергии, центробежного потенциала и величины  $1/r^3$  для атома водорода, который находится в состоянии  $|\psi_{nlm}\rangle$ .
54. Радиальная часть волновой функции стационарного состояния в центральном потенциале  $V(r)$  равна  $r(1 + ar)\exp(-br)$ . Известно, что потенциал обращается в нуль на бесконечности, а его сингулярность в нуле слабее, чем  $1/r^2$ . Найти  $l, E, V(r)$ .

*Теория момента*

55. Вычислить

$$\langle l'm' | l_x l_y | lm \rangle \quad \langle l'm' | l_y l_x | lm \rangle$$

56. Пусть

$$|\psi\rangle = \exp(i\varphi l_x) |lm\rangle$$

найти

$$\langle \psi | l_y l_z | \psi \rangle$$

57. Система двух спинов  $1/2$  находится в состоянии

$$|\psi\rangle = \exp(i\varphi S_x) | \uparrow \uparrow \rangle$$

Чему равны вероятности  $P_{S=1, S_z=1}$ ,  $P_{S=1, S_z=0}$ ,  $P_{S=1, S_z=-1}$ ,  $P_{S=0, S_z=0}$ ?

58. Система двух спинов  $1/2$  находится в состоянии  $S = 0$ . Оба спина пропускают сквозь прибор Штерна-Герлаха с полем, ориентированным по оси  $\vec{n}(\theta, \varphi)$ . Найти вероятности всех 4 возможных результатов (вв, вн, нв, нн).

59. Гамильтониан системы двух спинов  $1/2$  имеет вид

$$\hat{H} = -2\mu_1 s_z^{(1)} H_z - 2\mu_2 s_z^{(2)} H_z + \alpha \vec{s}^{(1)} \cdot \vec{s}^{(2)}$$

Найти уровни энергии и соответствующие волновые функции.

60. Волновая функция системы двух спинов имеет вид

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}|\uparrow\uparrow\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|\uparrow\downarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{4}}|\downarrow\uparrow\rangle$$

Найти матрицы плотности первого и второго спинов и вероятность того, что полный спин равен 0.

61. Матрица плотности системы двух спинов имеет вид

$$\hat{\rho} = \frac{1}{3}|\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + \frac{1}{3}|\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + \frac{1}{3}|\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + \frac{1}{9}|\uparrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| + \frac{1}{9}|\downarrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow|$$

Найти матрицы плотности первого и второго спинов и вероятность того, что полный спин равен 1.

62. Матрица плотности системы двух спинов имеет вид

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4}|\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| + \frac{1}{2}|\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + \frac{1}{4}|\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + i\frac{1}{8}|\uparrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| - i\frac{1}{8}|\downarrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow|$$

Найти матрицы плотности первого и второго спинов и вероятность того, что полный спин равен 0.

63. Волновая функция системы двух спинов имеет вид

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp(i\alpha S_y)|\uparrow\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\exp(i\beta S_x)\frac{(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)}{\sqrt{2}}$$

Найти матрицы плотности первого и второго спинов и вероятность того, что полный спин равен 1.

64. Сложение двух спинов  $1/2$ . Вычислить

$$\langle S = 1, S_z = 0 | s_x^{(2)} | S = 1, S_z = -1 \rangle$$

$$\langle S = 1, S_z = 1 | s_y^{(2)} | S = 0, S_z = 0 \rangle$$

$$\langle S = 0, S_z = 0 | s_z^{(1)} | S = 1, S_z = 0 \rangle$$

65. Сложение орбитального момента и спина. Вычислить

$$\langle j = l + 1/2, m_j = m + 1/2 | s_y | j = l + 1/2, m_j = m - 1/2 \rangle$$

$$\langle j = l - 1/2, m_j = m - 1/2 | s_x | j = l + 1/2, m_j = m + 1/2 \rangle$$

$$\langle j = l + 1/2, m_j = m + 1/2 | s_z | j = l - 1/2, m_j = m + 1/2 \rangle$$

66. Сложение орбитального момента и спина. Вычислить

$$\langle j = l + 1/2, m_j = m + 1/2 | l_x | j = l + 1/2, m_j = m - 1/2 \rangle$$

$$\langle j = l - 1/2, m_j = m - 1/2 | l_y | j = l + 1/2, m_j = m + 1/2 \rangle$$

$$\langle j = l - 1/2, m_j = m + 1/2 | l_z | j = l + 1/2, m_j = m + 1/2 \rangle$$

67. Частица со спином  $1/2$  находится в состоянии  $|j l s m_j\rangle$ . Найдите направление спина  $\vec{n}(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi})$  в точке с координатами  $(r, \theta, \varphi)$ .

68. Показать, что если  $A$  — скалярный оператор, то

$$\langle l' m' | A | l m \rangle = \delta_{l'l} \delta_{m'm} a(l)$$

т.е. его матричные элементы диагональны по  $l$ , диагональны по  $m$ , не зависят от  $m$ .

69. Сложение моментов  $l_1 = 2$  и  $l_2 = 1$ . Вычислить

$$|L = 1, M = 1\rangle \quad |L = 1, M = 0\rangle \quad |L = 1, M = -1\rangle$$

70. Сложение моментов  $l_1 = 2$  и  $l_2 = 2$ . Найти все старшие вектора с определенными значениями  $L$

71. Сложение моментов  $l_1 = 1$  и  $l_2 = 1$ . Вычислить все коэффициенты Клебша Гордона.

### *Динамика*

72. Спин  $1/2$  помещен в магнитное поле

$$\vec{H}(t) = (H_1 \cos \Omega t, H_1 \sin \Omega t, H_0)$$

В момент времени  $t = 0$  спин был ориентирован вверх. Найти вероятность переворота спина в момент времени  $t$ . Указать условие резонанса.

73. Одномерный гармонический осциллятор в момент времени  $t = 0$  находится в основном состоянии. Затем он на интервале  $0 < t < t_0$  подвергается воздействию постоянной силы  $f(t) = f_0$ . Найти волновую функцию в момент времени  $t$  и вероятность обнаружить его на  $n$ -ом уровне в момент времени  $t$ .

74. Линейный гармонический осциллятор в начальный момент времени находится в состоянии  $|0\rangle$ . При  $0 < t < 2\pi/\Omega$  на него действует классическая сила  $f(t) = f_0 \sin(\Omega t)$ . Найти волновую функцию  $|\psi(t)\rangle$  и вероятность пребывания в состоянии  $|n\rangle$  в произвольный момент времени  $t$ .

75. Одномерный гармонический осциллятор в момент времени  $t = 0$  находился в когерентном состоянии  $|\alpha\rangle$ . Найти волновую функцию в момент времени  $t$ . Вычислить средние значения координаты и импульса и их дисперсию в момент времени  $t$ .

76. Гамильтониан системы двух частиц со спином  $1/2$  имеет вид

$$\hat{H} = -2\mu_0(s_z^{(1)} - s_z^{(2)})H_z$$

Найти вероятность того, что полный спин системы равен нулю в момент времени  $t$ , если в момент времени  $t = 0$  спин первой частицы был ориентирован вдоль оси  $x$ , а второй — против оси  $x$ .

77. Гамильтониан системы двух частиц со спином  $1/2$  имеет вид

$$\hat{H} = -2\mu_0(s_z^{(1)} + s_z^{(2)})H_z$$

Найти вероятность того, что полный спин системы равен нулю в момент времени  $t$ , если в момент времени  $t = 0$  спин первой частицы был ориентирован вдоль оси  $y$ , а второй — против оси  $y$ .

78. Симметричный двумерный гармонический осциллятор в начальный момент времени находится в состоянии

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|10\rangle - \frac{i}{\sqrt{3}}|01\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|00\rangle$$

Найти волновую функцию  $|\psi(t)\rangle$ , среднее значение и дисперсию  $x, y, p_x, p_y$  в произвольный момент времени  $t$ .

79. Линейный гармонический осциллятор в начальный момент времени находится в состоянии

$$\rho(t=0) = \frac{2}{3}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|0\rangle\langle 1| + \frac{1}{3}|1\rangle\langle 1|$$

Найти матрицу плотности, среднее значение и дисперсию координаты и импульса в произвольный момент времени  $t$ .

80. Спин  $1/2$  в начальный момент времени находится в состоянии

$$\rho(t=0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi\vec{n}\vec{\sigma}$$

Он помещен в однородное магнитное поле, ориентированное по оси  $z$ . Найти матрицу плотности, направление и степень поляризации в произвольный момент времени  $t$ .

81. Решить уравнение Гайзенберга для оператора уничтожения  $a$  в одномерном гармоническом осцилляторе.

82. Решить уравнение Гайзенберга для оператора  $\hat{A}(t)$ , где  $\hat{A}(0) = \sigma_3$ ,  $\hat{H} = \hbar\omega\sigma_2$ .

83. Решить уравнение Гайзенберга для трех компонент момента  $l_x, l_y, l_z$ , гамильтониан системы  $\hat{H} = -\mu_0 l_x H_x$ .