

Квантовая механика. 1-ой поток. 2013 г.

Редакция от 29.12.13

С помощью \* отмечены вопросы,  
которые можно исключить по согласованию с преподавателем

<http://hep.phys.msu.ru>

Теоретические вопросы

1. Динамическая схема квантовой механики. Представления Гейзенберга и Шредингера. Переход от одного представления к другому. Оператор эволюции  $U(t_2, t_1)$ , его общий вид и основные свойства.
2. Эволюция квантовомеханического состояния во времени. Стационарные состояния, их основные свойства. Характерные особенности и различия в эволюции во времени нормированных суперпозиций состояний из дискретной и непрерывной частей энергетического спектра.
3. Квантование гармонического осциллятора методом операторов рождения-уничтожения. Когерентные состояния, их основные свойства.
4. Общие свойства уравнения Шредингера для нерелятивистской частицы в потенциальном поле. Уравнение непрерывности, его физический смысл. Вариационный принцип для стационарного ур. Шредингера.
5. Стационарная теория возмущений для невырожденного дискретного уровня (первый и второй порядки).
6. Теория возмущений для вырожденного дискретного уровня. Близкие уровни под влиянием возмущения.
7. Принцип неразличимости одинаковых по своим физическим характеристикам частиц. Бозоны и фермионы. Волновые функции системы  $N$  тождественных частиц, разложение по одночастичному базису. Эффективное спин-спиновое (обменное) взаимодействие как результат расщепления энергетических уровней под влиянием возмущения в системе двух тождественных частиц со спином  $1/2$ .
8. Многоэлектронный атом в приближении центрального поля. Оболочки и термы. Периодическая система элементов.
9. Правила Хунда для термов внешней оболочки многоэлектронного атома, их обоснование. Тонкая структура термов,  $LS$ - и  $JJ$ - типы связи.
10. Вариационные методы (Ритца, Хартри-Фока и Хартри) определения электронных ВФ и уровней энергии многоэлектронного атома (на примере пара- и ортогелия).
11. Диаграммы Юнга для валентной оболочки. Определение явного вида волновых функций термов через старшие вектора и детерминант Слэтера.
12. Модель Томаса-Ферми для многоэлектронного атома. Поправка Амальди. Зависимость между атомным номером  $Z$  и орбитальным моментом электронов  $l$  валентной оболочки в модели ТФ, ее проявление в периодической системе элементов.
13. Основы молекулярной связи (адиабатическое приближение). Ион и молекула водорода, их электронные волновые функции в первом приближении. Роль обменных эффектов.
14. Многоэлектронный атом в постоянном однородном электрическом и магнитном полях.
15. Общая постановка задачи о квантовых переходах. Нестационарная теория возмущений Дирака. Переходы под воздействием мгновенного изменения потенциала и в адиабатическом случае.
16. Переходы под воздействием гармонического возмущения. Золотое правило (Ферми) для скорости перехода в первом порядке ТВ, область его применимости.
17. Теория возмущений для переходов в непрерывном спектре для независящего явно от времени взаимодействия. Прямые и последовательные переходы.  $T$ -оператор (матрица

- реакций). Уравнение Липпмана-Швингера для  $T$ -оператора. Борновский ряд.
18.  $S$ -матричная формулировка задачи о переходах. Взаимосвязь между матричными элементами  $S$ - и  $T$ -операторов. Скорость перехода и оптическая теорема в общем случае.
  19. Обращение времени в квантовой механике. Теорема взаимности и принцип детального равновесия для обращенных во времени переходов. Теорема Крамерса.
  20. Эволюция метастабильного состояния. Закон распада, его скорость и форма линии, временной интервал. Связь между полушириной линии и временем жизни.
  21. Потенциальное упругое рассеяние. Амплитуда и дифференциальное сечение. Оптическая теорема для упругого рассеяния.
  22. Уравнение Липпмана-Швингера для упругого потенциального рассеяния. Борновский ряд для амплитуды рассеяния. Первое борновское приближение, область его применимости.
  23. Парциальное разложение амплитуды упругого рассеяния. Поведение парциальных амплитуд и сечения рассеяния при низких энергиях.
  24. Резонансы в упругом рассеянии при низких энергиях при наличии неглубокого дискретного уровня, ф. Бете-Пайерлса.
  25. Амплитуда рассеяния как функция комплексного волнового числа (энергии). Связь между дискретными, виртуальными и метастабильными уровнями и резонансами. Резонансное рассеяние на метастабильном уровне, ф. Брейта-Вигнера.
  26. Упругое рассеяние при высоких энергиях. Приближение эйконала.
  27. Переходы в системе 2 тождественных частиц, амплитуда упругого рассеяния 2 тождественных частиц (для с.ц.м.).
  28. Квантование свободного электромагнитного поля излучения в кулоновской калибровке. Фотоны, их энергия-импульс, спин и спиральность. Когерентные состояния и классические э-м поля.
  29. Излучение и поглощение фотонов атомом в первом порядке теории возмущений. Спонтанное излучение и вынужденное излучение и поглощение. Коэффициенты Эйнштейна.
  30. Правила отбора, диаграмма направленности и поляризация излучения для однофотонных  $E1$ -дипольных переходов в атоме, оценка их полной интенсивности.
  31.  $E2$  и  $M1$ -переходы в атомах, правила отбора, оценка их полной интенсивности.
  32. Уравнение Дирака. Уравнение непрерывности, его ковариантная форма. Спин частицы Дирака.
  33. Уравнение Дирака во внешнем электромагнитном поле. Нерелятивистское приближение, уравнение Паули. Спиновый магнитный момент дираковской частицы.
  34. Решения ур. Дирака для свободной частицы с определенным импульсом и спиральностью. Интерпретация состояний с отрицательной энергией. Позитроны как дырки в море Дирака.
  35. Квазирелятивистское разложение уравнения Дирака для электрона в центральном поле. Спин-орбитальное взаимодействие и другие релятивистские поправки, их физический смысл.
  36. Релятивистский атом водорода. Точное решение для энергетического спектра, вырождение уровней, лэмбовский сдвиг. Зависимость от заряда и размеров ядра, *sparkling vacuum*.

## Задачи

1. Найти зависимость разности энергий основного и первого возбужденного уровней молекулы аммиака  $NH_3$  от внешнего электрического поля.
2. В первом исчезающем приближении найти коэффициент электрической поляризуемости атома водорода в основном состоянии.
3. В первом исчезающем порядке теории возмущений найти энергию взаимодействия двух атомов водорода на больших расстояниях (силы Ван-дер-Ваальса) и ее зависимость от обменных эффектов.
4. Найти расщепление уровней энергии атома водорода в слабом по величине напряженности однородном магнитном поле  $\vec{\mathcal{H}}$ , когда  $\frac{e\hbar}{2mc} \mathcal{H} \ll |\Delta E_{jj'}|$  (нормальный эффект Зеемана).
5. Рассчитать расщепление уровней атома водорода в среднем по величине напряженности однородном магнитном поле  $\vec{\mathcal{H}}$ , когда  $\frac{e\hbar}{2mc} \mathcal{H} \simeq |\Delta E_{jj'}|$  (эффект Пашена-Бака).
6. Рассчитать расщепление уровней атома водорода в сильном по величине напряженности однородном магнитном поле  $\vec{\mathcal{H}}$ , когда  $\frac{e\hbar}{2mc} \mathcal{H} \gg |\Delta E_{jj'}|$  (аномальный эффект Зеемана).
7. Рассчитать расщепление уровня атома водорода с  $n = 2$  в слабом по величине напряженности однородном электрическом поле (эффект Штарка мал по сравнению с  $|\Delta E_{jj'}|$ ).
- \*8. Рассчитать расщепление уровня атома водорода с  $n = 2$  в среднем по величине напряженности однородном электрическом поле (эффект Штарка одного порядка с  $|\Delta E_{jj'}|$ ).
9. Рассчитать расщепление уровня атома водорода с  $n = 2$  в перпендикулярных однородных электрическом и магнитном полях с учетом спинового магнитного момента электрона. Тонкой структурой пренебречь.
10. Найти расщепление уровня атома водорода с  $n = 2$  в параллельных однородных электрическом и магнитном полях с учетом спинового магнитного момента электрона. Тонкой структурой пренебречь.
11. Найти вариационным методом Ритца энергию связи и волновую функцию основного состояния гелиеподобного атома с двумя электронами. Пробную функцию выбрать в виде произведения  $1s$ -одноэлектронных кулоновских функций с эффективным зарядом  $\alpha = Z - \sigma$ , играющим роль вариационного параметра.
- \*12. Оценить энергию ионизации возбужденного электрона для пара- и орто-гелия. Возбужденный электрон находится в состоянии  $nl$ , второй электрон в состоянии  $1s$  и полностью экранирует одну единицу заряда ядра.
13. Найти среднюю энергию электронов и давление вырожденного электронного газа ( $T = 0$ ).
14. Найти парамагнитную восприимчивость вырожденного электронного газа ( $T = 0$ ).
15. Найти зависимость тока холодной эмиссии электронов с поверхности металла от приложенного электрического поля (без учета наведения зеркального заряда).
- \*16. Найти зависимость энергии магнона от волнового числа в одномерной спиновой цепочке с гамильтонианом  $H = -\alpha \sum_n \vec{s}_n \vec{s}_{n+1} - \beta \sum_n \vec{s}_n \vec{s}_{n+2} - 2\mu_0 \vec{\mathcal{H}} \sum_n \vec{s}_n$ .
17. Разложить электронную конфигурацию  $(np)^3$  на термы.
18. Разложить электронную конфигурацию  $(nd)^2$  на термы.
19. Найти явный вид волновых функций термов в конфигурации  $(np)^3$ .
20. Найти явный вид волновых функций термов в конфигурации  $(np)^4$ .
21. Найти характеристики терма основного состояния ( $S, L, J$ ) валентной электронной конфигурации  $k$  электронов с орбитальным моментом  $l$ .

22. Показать, что оператор  $\sum_{i=1}^Z g(r_i)(\vec{l}_i \cdot \vec{s}_i)$  спин-орбитального взаимодействия приводит к расщеплению каждого термина с квантовыми числами  $L, S$  на  $2L + 1$  или на  $2S + 1$  подуровней.
23. Найти расщепление уровней энергии многоэлектронного атома в сильном однородном магнитном поле  $\vec{H}$ , когда  $\frac{e\hbar}{2mc} \mathcal{H} \gg |\Delta E_{JJ'}|$  (аномальный эффект Зеемана).
24. Найти расщепление уровней энергии многоэлектронного атома в слабом однородном магнитном поле  $\vec{H}$ , когда  $\frac{e\hbar}{2mc} \mathcal{H} \ll |\Delta E_{JJ'}|$  (нормальный эффект Зеемана).
25. Найти расщепление уровней энергии многоэлектронного атома в слабом однородном электрическом поле (эффект Штарка мал по сравнению с  $|\Delta E_{JJ'}|$ ).
- \*26. Вариационным методом оценить энергию диссоциации иона  $H_2^+$ .
27. Двухуровневая система с состояниями  $|1\rangle, |2\rangle$ , энергии которых есть  $\hbar\omega_1, \hbar\omega_2$ , подвергается действию не зависящего от времени возмущения  $W$ . Вычислить вероятность обнаружить то или иное состояние в момент времени  $t$ , если в момент времени  $t = 0$  система находилась в основном состоянии.
28. Двухуровневая система с состояниями  $|1\rangle, |2\rangle$ , энергии которых есть  $\hbar\omega_1, \hbar\omega_2$ , подвергается действию периодического возмущения, которое описывается эрмитовым оператором  $W * \cos(\omega t)$ . Вычислить вероятность обнаружения в том или ином состоянии в момент времени  $t$ , если в момент времени  $t = 0$  система находилась в основном состоянии, и расстройка частот  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 - \omega$  мала.
29. Найти зависимость интенсивности сигнала в идеальном ЭПР-эксперименте от угла  $\alpha$  между векторами поляризующего (постоянного) и возбуждающего (переменного) магнитными полями  $\vec{H}_0$  и  $\vec{H}_1$ .
30. При  $t = 0$  нейтральная частица со спином  $s=1/2$  и магнитным моментом  $\vec{\mu} = \mu_0\vec{s}$  находится в состоянии с проекцией спина  $+1/2$  на некоторое направление  $\vec{n}$ . Рассмотреть прецессию магнитного момента в поле, направленном под углом  $\theta$  к этому направлению и имеющем напряженность  $\mathcal{H}$ . Найти направление, вдоль которого ориентирован спин в момент времени  $t$ .
- \*31. Нейтральная частица со спином  $1/2$  и магнитным моментом  $\vec{\mu} = \mu_0\vec{s}$  находится в однородном магнитном поле, изменяющемся во времени по закону  $\vec{H} = \mathcal{H} \{ \sin\theta \cos\omega t, \sin\theta \sin\omega t, \cos\theta \}$ . В момент времени  $t = 0$  проекция спина на направление поля была равна  $+1/2$ . Определить вероятность перехода частицы к моменту времени  $t$  в состояние, в котором проекция спина на направление магнитного поля равна  $-1/2$ .
32. Найти вероятность перехода атома трития  $H^3$  из  $1s$  состояния в  $1s$  и  $2s$  состояния иона  $He^{3+}$  при  $\beta$ -распаде одного из нейтронов ядра.
33. Найти дифференциальное и полное сечение неупругого рассеяния частицы на неподвижном сферическом гармоническом осцилляторе с переходом последнего из основного в первое возбужденное состояние при контактном взаимодействии между частицей и осциллятором  $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V_0\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ .
34. В борновском приближении вычислить дифференциальное и полное сечение неупругого рассеяния мюона на неподвижном атоме водорода с возбуждением атомного электрона из  $1s$  в  $2s$ .
- \*35. В борновском приближении вычислить дифференциальное и полное сечение неупругого рассеяния электрона на неподвижном атоме водорода с возбуждением атома из  $1s$  в  $2s$  с учетом обменных эффектов.
36. В приближении эйконала найти парциальные фазы рассеяния на потенциале  $A/r^2$  для

$l \gg 1$ . Сравнить с точным ответом.

37. Найти точную амплитуду для упругого кулоновского рассеяния частицы на неподвижном точечном кулоновском источнике.
38. В борновском приближении вычислить дифференциальное и полное сечение упругого рассеяния на потенциале Юкавы  $V(r) = g \exp(-ar)/r$ .
39. Без учета обменных эффектов вычислить дифференциальное и полное сечение упругого рассеяния быстрых электронов на атоме водорода, находящемся в основном состоянии.
40. В борновском приближении выразить амплитуду упругого рассеяния заряженной бесспиновой частицы на локализованном сферическом распределении заряда через его плотность  $\rho(r)$ .
41. В борновском приближении найти формфактор, дифференциальное и полное сечение упругого рассеяния заряженной бесспиновой частицы на равномерно заряженном шаре радиуса  $R$ .
42. Вычислить амплитуду и сечение упругого рассеяния медленной частицы на потенциальной яме  $V(r) = -V_0, r < a, V(r) = 0, r > a$ . Объяснить резонансный характер такого рассеяния.
43. Вычислить амплитуду и сечение упругого резонансного рассеяния медленной частицы для  $s$ -волны на потенциале  $V(r) = V_0 \delta(r - a), V_0 > 0$ , энергию и время жизни метастабильных состояний, соответствующих этим резонансам.
44. Найти характеристики резонансного рассеяния медленной частицы для  $s$ -волны на потенциале  $V(r) = -V_0 \delta(r - a), V_0 > 0$ . Установить, для каких значений  $V_0$  резонанс будет обусловлен наличием дискретного или виртуального уровней.
45. В приближении эйконала найти амплитуду и полное сечение рассеяния частиц высокой энергии на сферически-симметричном потенциале  $V(r) = V_0, r < a, V(r) = 0, r > a$ , если де-бройлевская длина волны частиц  $\lambda \ll a$ , а их энергия  $E \gg V_0$ .
46. Определить полное сечение упругого рассеяния непроницаемой сферой радиуса  $a$  для быстрых частиц, де-бройлевская длина волны которых  $\lambda \ll a$ .
47. Определить полное сечение упругого рассеяния непроницаемой сферой радиуса  $a$  для медленных частиц, де-бройлевская длина волны которых  $\lambda \gg a$ .
48. Найти вероятность того, что рассеянный на протоне медленный нейтрон изменит ориентацию своего спина, если до столкновения спин нейтрона был направлен по оси  $z$ , а спин протона — в противоположном направлении. Амплитуда рассеяния системы протон-нейтрон в синглетном состоянии —  $f_0$ , в триплетном —  $f_1$ .
49. Найти дифференциальное сечение упругого кулоновского рассеяния двух  $\alpha$ -частиц с учетом интерференции фаз (в системе центра масс).
50. Найти дифференциальное сечение упругого кулоновского рассеяния электрона на электроне для синглетного и триплетного состояний по полному спину с учетом интерференции фаз (в системе центра масс).
51. Найти дифференциальное сечение упругого кулоновского рассеяния электрона на электроне для неполяризованных пучков с учетом интерференции фаз (в системе центра масс). Отдельно рассмотреть случаи быстрых  $e^2 \ll \hbar v$  и медленных  $e^2 \gg \hbar v$  частиц.
52. Найти средние значения и дисперсию электрической и магнитной напряженностей квантованного электромагнитного поля излучения в одномодовом когерентном состоянии  $|\alpha\rangle$ .
53. Найти средние значения и дисперсию векторного потенциала квантованного электромагнитного поля излучения в двухмодовых когерентных состояниях  $|\alpha_1\rangle \otimes |\alpha_2\rangle$  и  $[|\alpha_1\rangle + |\alpha_2\rangle]/[2(1 + \langle\alpha_1|\alpha_2\rangle)]^{1/2}$ . Указать, в чем основное различие между этими состояниями.

54. Рассчитать угловое распределение фотоэлектронов при фотоэффекте на основном состоянии водородоподобного иона, индуцированном поляризованной плоской э-м волной, считая конечное состояние электрона свободной частицей. Спиновый магнитный момент электрона не учитывать.
- \*55. Рассчитать угловое распределение фотоэлектронов при фотоэффекте с переворотом спина электрона на основном состоянии атома водорода, индуцированном поляризованной плоской э-м волной, считая конечное состояние электрона свободной частицей.
56. Показать, что однофотонные переходы  $S \rightarrow S$  запрещены во всех порядках мультипольности.
57. Установить, между какими уровнями заряженного сферического гармонического осциллятора возможны электромагнитные переходы в дипольном приближении. Вычислить время жизни первого возбужденного состояния осциллятора в этом приближении.
58. Установить закон, по которому меняется интенсивность и поляризация линий в триплете, соответствующем зеемановскому расщеплению при переходе  $3D \rightarrow 2P$ , в зависимости от угла между направлением вылета фотонов и магнитным полем.
59. В дипольном приближении вычислить время жизни уровней  $2P_{1/2}$  и  $2P_{3/2}$  атома водорода (с учетом тонкой структуры).
60. Нейтральная частица со спином  $s = 1/2$  и магнитным моментом  $\mu\vec{s}$  находится в однородном магнитном поле напряженности  $\mathcal{H}$ . Найти время жизни возбужденного состояния и угловое распределение излучения при его распаде.
61. Найти явный вид волновой функции свободной дираковской частицы с определенными импульсом и спиральностью, ток переноса для свободного движения волнового пакета с энергией фиксированного знака.
62. Найти явный вид волновой функции электрона и кратность вырождения соответствующего энергетического уровня в релятивистском атоме водорода для  $1S_{1/2}$ ,  $2S_{1/2}$ ,  $2P_{1/2}$ . Объяснить различие в кратности вырождения.
63. Найти спиновое гиромагнитное отношение ( $g_D$ -фактор Брейта) для  $1S_{1/2}$  состояния дираковского электрона в водородоподобном ионе с зарядом ядра  $Z$ .
- \*64. Найти спиновое гиромагнитное отношение ( $g_D$ -фактор Брейта) для дираковского электрона, находящегося в водородоподобном ионе с зарядом ядра  $Z$  в связанном состоянии с квантовыми числами  $nlj$ .