

Attention! Уравнение Дирака будет подробно разбираться в осеннем семестре и вопросы по нему будут обязательной составной частью заключительного экзамена.

Список задач дается в максимальном варианте, для разных групп он может уточняться семинаристом.

Теоретические вопросы

1. Комбинационный принцип и матричная механика Гейзенберга. Физические величины как эрмитовы операторы в гильбертовом пространстве.
2. Динамическая схема квантовой механики. Представления Гейзенберга и Шредингера. Переход от одного представления к другому. Оператор эволюции  $U(t_2, t_1)$ , его общий вид и основные свойства.
3. Принцип соответствия между классической и квантовой механикой, каноническое квантование.
4. Квантовомеханическая теория измерения. Спектр и средние значения физических величин. Измерение наблюдаемых с чисто дискретным невырожденным спектром и чистые состояния квантовой системы. Полный набор наблюдаемых.
5. Вероятностная интерпретация результатов измерения некоммутирующих величин. Соотношение "неопределенностей" для дисперсий некоммутирующих величин. Простейшие ЭПР-"парадоксы" и их объяснение.
6. Совокупность чистых состояний квантовой системы как гильбертово пространство, его основные свойства. Принцип суперпозиции чистых состояний, его обоснование. Спектральное разложение эрмитового оператора и функций от него. Квантовомеханическая интерпретация дискретного и непрерывного спектров оператора наблюдаемой.
7. Изоморфизм представлений гильбертова пространства. Эквивалентность любого представления матричному. Переход от одного представления к другому как унитарное преобразование, его шредингеровская и гейзенбергова формы. Взаимосвязь унитарных и канонических преобразований.
8. Координатное и импульсное представления. Волновая функция, ее вероятностная интерпретация. Переход от одного представления к другому.
9. Симметрии и интегралы движения в квантовой механике. Вырождение уровней энергии при наличии некоммутирующих интегралов движения.
10. Стационарные состояния, их основные свойства. Эволюция во времени состояний из дискретной и непрерывной частей энергетического спектра.
11. Матрицы плотности и смешанные состояния. Средние значения физических величин в смешанном состоянии. Основные свойства матриц плотности. Матрицы плотности подсистем, объяснение простейших ЭПР-"парадоксов" с их помощью.
12. Квантование гармонического осциллятора методом операторов рождения-уничтожения. Когерентные состояния, их основные свойства.
13. Общие свойства уравнения Шредингера для нерелятивистской частицы в потенциальном поле. Уравнение непрерывности. Вариационный принцип для стационарного ур. Шредингера.
14. Квантовая механика частицы в потенциальном поле для одного пространственного измерения. Основные свойства дискретного спектра. Специфика одномерной потенциальной ямы с равновысокими стенками. Одномерное рассеяние на потенциале с регулярными асимптотиками  $V(\pm\infty) = V_{\pm}$ .
15. Одномерное уравнение Шредингера с периодическим потенциалом. Теорема Флоке, функции Блоха, квазиимпульс и зоны Бриллюэна.
16. Квазиклассическое (ВКБ) приближение, условие применимости. Квазиклассические волновые функции, их продолжение через точки поворота. Правило квантования Бора-Зоммерфельда.
17. Туннельный эффект в ВКБ-приближении. Волновые функции и разность энергий двух нижних уровней в потенциале вида "mexican hat". Рождение пар за счет флуктуаций вакуума во внешних полях.
18. Частица в центрально-симметричном поле. Разделение переменных. Орбитальный момент, собственные функции и собственные значения  $l^2$  и  $l_z$ . Природа целочисленности орбитального момента. Конечный поворот как унитарное преобразование координатной волновой функции.
19. Радиальное ур-ние Шредингера. Граничное условие при  $r = 0$ , его обоснование. Общие свойства энергетического спектра и волновых функций связанных состояний в центрально-симметричном поле. Падение на центр. ВКБ-приближение для радиального уравнения.
20. Угловой момент и конечные повороты в общем случае. Перестановочные соотношения для компонент момента. Спектр операторов  $J^2$ ,  $J_z$ . Матричные элементы компонент момента в базисе собственных векторов операторов  $J^2$ ,  $J_z$ . Операторы спина частицы, матричные элементы и собственные вектора. Спин  $1/2$ , основные свойства.
21. Векторное сложение двух моментов. Коэффициенты векторного сложения, их основные свойства и физический смысл. Коэффициенты сложения двух спинов  $1/2$  и спина  $1/2$  с орбитальным моментом  $l$ .
22. Операторы конечных вращений. Матрицы конечных вращений в параметризации Эйлера.

23. Скаляр и вектор в квантовой механике, их коммутаторы с компонентами полного углового момента системы как следствие законов преобразования при конечных поворотах. Показать, что скалярное произведение двух векторов есть скаляр, а векторное — (псевдо)вектор.
24. Правила отбора для матричных элементов от скаляра и вектора по состояниям  $|JM\rangle$  с фиксированным полным моментом и его третьей проекцией. Показать, что для скаляра  $\langle J'M'|A|JM\rangle = \delta_{JJ'}\delta_{MM'}\langle J|A|J\rangle$ , для вектора  $\langle JM|\vec{A}|JM'\rangle = \langle JM|\vec{J}|JM'\rangle \times \langle J|\vec{A}\vec{J}|J\rangle/J(J+1)$ .
25. Пространственная инверсия в квантовой механике. Четность орбитального состояния. Тензоры и псевдотензоры (на примере скаляра и вектора). Правила отбора по четности.

#### Задачи

1. Найти дисперсию координаты и импульса для гармонического осциллятора, находящегося на  $n$ -ом энергетическом уровне. Что в ответе является чисто квантовым эффектом?
2. Найти уровни энергии и вектора состояния одномерного гармонического осциллятора в постоянном внешнем поле

$$H = \hbar\omega(a^+a + 1/2) + f^*a + fa^+$$

3. Найти средние значения и дисперсии координаты и импульса осциллятора и корреляторы  $\langle xp\rangle - \langle x\rangle\langle p\rangle$ ,  $\langle px\rangle - \langle p\rangle\langle x\rangle$  в когерентном состоянии.
4. Найти явный вид эволюции по времени когерентного состояния гармонического осциллятора.
5. Исходя из условия минимизации соотношения "неопределенностей" между координатой и импульсом, найти явный вид волновых функций для когерентных состояний в координатном и импульсном представлениях.
6. Одномерный гармонический осциллятор в момент времени  $t = 0$  находится в основном энергетическом состоянии. Затем при  $t > 0$  он подвергается воздействию внешней силы  $f(t)$ . Найти явный вид оператора эволюции и вероятность обнаружить осциллятор в  $n$ -ом возбужденном энергетическом состоянии как функцию  $t$ .
7. Взаимодействие осциллятора с двухуровневой системой описывается гамильтонианом

$$H = \hbar\omega a^+a + \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_3 + \hbar\gamma(a\sigma_+ + a^+\sigma_-)$$

где  $\sigma_{\pm} = (\sigma_1 \pm i\sigma_2)/2$ ,  $\sigma_i$  — матрицы Паули. Найти стационарные состояния и уровни энергии в такой системе, среднее значение и дисперсию энергии осциллятора в этих состояниях.

8. Взаимодействие осциллятора с двухуровневой системой описывается гамильтонианом

$$H = \hbar\omega a^+a + \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_3 + \hbar\gamma(a\sigma_+ + a^+\sigma_-)$$

где  $\sigma_{\pm} = (\sigma_1 \pm i\sigma_2)/2$ ,  $\sigma_i$  — матрицы Паули. Найти как функцию времени вероятность одновременно обнаружить двухуровневую систему в верхнем энергетическом состоянии и осциллятора — в состоянии с  $m$  квантами, если при  $t = 0$  двухуровневая система находилась в нижнем состоянии, а осциллятор — в состоянии с  $n$  квантами.

9. В начальный момент времени плотность распределения координат свободной нерелятивистской частицы массы  $m$  имела гауссову форму. Как будет изменяться со временем ширина пакета?
10. Найти уровни энергии и общее число связанных состояний в одномерной симметричной потенциальной яме  $V(x) = -V_0 + (\hbar^2/2m)\Omega\delta(x)$ ,  $|x| < a$ ,  $V(x) = 0, |x| > a$ . Как будут вести себя уровни при  $\Omega \rightarrow \pm\infty$ ?
11. Найти число дискретных уровней энергии в потенциале  $V(x) = -V_0[\delta(x-a) + \delta(x+a)]$  в зависимости от параметров потенциала.
12. Найти уровни энергии и общее число связанных состояний в одномерной потенциальной яме шириной  $a$  с разновысокими стенками  $V_1 < V_2$ .
13. Найти уровни энергии в потенциале  $V(x) = -V_0/\cosh^2(x/a)$ .
14. Найти коэффициенты прохождения-отражения и соответствующие фазовые сдвиги при прохождении частицы через потенциал вида  $V(x) = -V_0 + (\hbar^2/2m)\Omega\delta(x)$ ,  $|x| < a$ ,  $V(x) = 0, |x| > a$ . Что будет при  $\Omega \rightarrow \pm\infty$ ?
15. Найти вероятность туннелирования частицы сквозь одномерный потенциальный барьер  $V(x) = V_0 + (\hbar^2/2m)\Omega\delta(x)$ ,  $|x| < a$ ,  $V(x) = 0, |x| > a$  (энергия частицы меньше  $V_0$ ). Что будет при  $\Omega \rightarrow \pm\infty$ ?
16. Найти расположение зон Бриллюэна для одномерной решетки Дирака  $V(x) = V_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-na)$ ,  $V_0 > 0$ .
17. Найти расположение нижних зон Бриллюэна для одномерной решетки Дирака  $V(x) = V_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-na)$ ,  $V_0 < 0$ .
18. Методом ВКБ найти уровни энергии одномерного гармонического осциллятора.

19. В ВКБ-приближении найти уровни энергии частицы массы  $m$  в потенциальном поле вида  $V(z) = \infty, z < 0, V(z) = mgz, z > 0$ . Сравнить с точным ответом.
20. В ВКБ-приближении найти среднее положение и разность энергий нижних уровней частицы массы  $m$  в потенциальной яме вида  $V(x) = -Ax^2, |x| \leq a, V(x) = 0, |x| > a$ .
21. В рамках ВКБ-приближения оценить вероятность образования электрон-позитронной пары в постоянном электрическом поле за счет флуктуаций вакуума.
22. В рамках ВКБ-приближения определить энергетическую зависимость вероятности рождения пар фотонов в гравитационном поле черной дыры вблизи поверхности Шварцшильда за счет флуктуаций вакуума, если гравитационное ускорение над сферой Шварцшильда равно  $\chi c^2$ .
23. Пусть гамильтониан зависит от  $\lambda$  как от параметра и  $H(\lambda) |\psi(\lambda)\rangle = E(\lambda) |\psi(\lambda)\rangle$ . Показать, что для нормированных на единицу векторов  $|\psi(\lambda)\rangle$  имеет место соотношение  $\frac{\partial E(\lambda)}{\partial \lambda} = \langle \psi(\lambda) | \frac{\partial H(\lambda)}{\partial \lambda} | \psi(\lambda) \rangle$ .
24. Доказать, что в состоянии с определенной энергией в центральносимметричном поле  $V(r) = g * r^\gamma$  средние значения кинетической и потенциальной энергий связаны соотношением:  $2\langle T \rangle = \gamma \langle V \rangle$  (теорема вириала).
25. С помощью оценки Баргмана описать основные свойства спектра связанных состояний в сферически-симметричном потенциале со степенной асимптотикой в нуле и на бесконечности.
26. Найти  $S$ -уровни энергии в сферически-симметричной яме:  $V(r) = -V_0 + (\hbar^2/2m)\delta(r-a), r \leq a, V(r) = 0, r > a$ . Как будут вести себя уровни при  $\Omega \rightarrow \pm\infty$ ?
27. Нуклон-нуклонный потенциал на расстояниях порядка 1-2 Фм аппроксимируется функцией  $V(r) = -A \exp(-r/\lambda), \lambda = \hbar/m_\pi c$ . Найти константу связи  $A$ , если энергия связи нуклонов в дейтроне равна 2,23 МэВ.
28. Найти уровни энергии связанных состояний в потенциале  $V(r) = -A/r - B/r^2$  и кратность их вырождения.
29. Радиальная волновая функция стационарного состояния частицы массы  $m$  в исчезающем на бесконечности центральном поле  $U(r)$  имеет вид  $R(r) = r(1 - \alpha r)e^{-\beta r}$ . Найти значение орбитального момента в этом состоянии, его энергию и явный вид потенциала  $U(r)$ .
30. Найти вероятность пребывания электрона в классически запрещенной области для водородоподобного атома в основном состоянии.
31. Вычислить среднее значение  $\langle r^{-1} \rangle, \langle r^{-2} \rangle, \langle r^{-3} \rangle$  в состоянии с определенной энергией  $E_n$  и орбитальным моментом  $l$  в кулоновом поле притяжения.
32. Найти среднее значение и дисперсию расстояния между электроном и ядром для водородоподобного атома в  $n$ -ом возбужденном состоянии.
33. Найти среднее значение различных компонент квадрупольного момента  $Q_{ik} = x_i x_k - 1/3 \delta_{ik} r^2$  для заряженной бесспиновой частицы, находящейся в кулоновом поле притяжения в стационарном состоянии с фиксированными  $n, l, m$ .
34. Найти уровни энергии бесспиновой заряженной частицы в постоянном однородном магнитном поле напряженности  $\mathcal{H}$  в состоянии с фиксированным значением проекций импульса и орбитального момента на направление поля.
35. Определить энергетический спектр заряженной бесспиновой частицы, движущейся в однородном электрическом и однородном магнитном полях, направления напряженностей которых взаимно перпендикулярны.
36. Найти уровни энергии заряженного сферически симметричного осциллятора, помещенного в постоянное однородное магнитное поле напряженности  $\mathcal{H}$ , для состояний с фиксированной проекцией орбитального момента на направление поля.
37. Найти спектр оператора углового момента для планарной (пространственно-двумерной) системы.
38. Установить соотношение между дисперсиями проекций  $J_x, J_y$  момента в состоянии с фиксированным значением  $J_z$ .
39. Вычислить  $f[aE + \vec{b}\vec{\sigma}]$ , где  $E$  - единичная матрица,  $\vec{\sigma}$  - матрицы Паули, а  $a$  и  $\vec{b}$  - произвольные действительные число и вектор.
40. Найти спектр энергий заряженной частицы со спином  $1/2$  и магнитным моментом  $\vec{\mu} = \mu_0 \vec{s}$  в постоянном однородном магнитном поле  $\mathcal{H}$ .
41. Частица массы  $m$  со спином  $1/2$  и магнитным моментом  $\vec{\mu} = \mu_0 \vec{s}$  движется в неоднородном магнитном поле  $\vec{\mathcal{H}} = \{0, -ky, \mathcal{H}_0 + kz\}$ . Найти операторы  $\vec{r}(t), \vec{p}(t)$ . Определить средние значения и дисперсию координат частицы, если в начальный момент времени частица находилась в координатном состоянии  $\psi = \varphi(\vec{r}) e^{ip_0 x/\hbar}$ , где  $\varphi(\vec{r})$  действительная квадратично-интегрируемая функция, и чистом спиновом состоянии  $\chi$ . Прецессией магнитного момента пренебречь.
42. Найти спиновые волновые функции системы двух частиц со спином  $1/2$ , которые являются собственными функциями операторов  $\vec{s}^2 = (\vec{s}_1 + \vec{s}_2)^2, s_z = (s_1)_z + (s_2)_z$ .
43. Протон и нейтрон находятся в синглетном состоянии по полному спину. Найти вероятности обнаружить у них одинаковые или различные значения проекции спина на ось  $\vec{n}$  при одновременном измерении.
44. Выразить проекционные операторы на синглетное и триплетное состояния для системы из двух частиц со спином  $1/2$  через скалярное произведение их спинов  $\vec{s}_1 \vec{s}_2$ .

45. Две частицы со спином  $1/2$  находятся в состоянии  $|\Psi\rangle = \exp(i\varphi_1 s_{1x}) \exp(i\varphi_2 s_{2y}) |\uparrow\uparrow\rangle$ . Найти вероятности обнаружить частицы в синглетном и триплетном состояниях по полному спину.
46. Гамильтониан системы двух взаимодействующих частиц со спином  $1/2$ , помещенных в постоянное однородное магнитное поле, имеет вид

$$H = -(\mu_1 \vec{s}_1 + \mu_2 \vec{s}_2) \vec{H} + \alpha \vec{s}_1 \vec{s}_2 .$$

Найти уровни энергии системы.

47. Три частицы со спином  $1/2$  находятся в состоянии, когда 1-ая и 2-ая образуют синглет по их суммарному спину  $S_{12}$ , а 3-я находится в произвольном независимом чистом состоянии  $|\phi\rangle$ . Проводится серия одновременных измерений некоторой величины  $F$ , относящейся только к 1-ой частице, и величины суммарного спина 2-ой и 3-ей частиц  $S_{23}$ . Отбираются события, когда  $S_{23} = 0$ . Показать, что для этих событий  $\langle F \rangle = \langle \phi | F | \phi \rangle$ ,  $\langle F^2 \rangle = \langle \phi | F^2 | \phi \rangle$ . Как изменятся результаты измерения  $F$ , если не делать такую специальную выборку?
48. Найти вид операторов спина  $1$  в представлении, где  $S_z$  диагональна. Показать, что операторы спина  $1$  могут быть представлены также в виде  $(S_i)_{jk} = i(\hbar)\epsilon_{jlk}$ . Найти унитарное преобразование, связывающее эти два представления.
49. Определить отношение интенсивностей пятен на экране в опыте Штерна-Герлаха для поляризованного по оси  $z$  пучка частиц спина  $1$  и магнитным моментом  $\vec{\mu} = \mu_0 \vec{s}$ , если отклоняющее магнитное поле ориентировано под углом  $\theta$  к оси  $z$ .
50. Частица со спином  $1/2$  находится в поле центральных сил. Найти волновые функции этой частицы, являющиеся одновременно собственными функциями трех коммутирующих операторов:  $j_z = l_z + s_z$ ,  $j^2$ ,  $l^2$ .
51. Частица со спином  $1/2$  находится в состоянии с квантовыми числами  $(j, l, s, j_z)$ . Найти вероятности различных значений проекций орбитального и спинового моментов частицы  $l_z$  и  $s_z$  при их одновременном измерении в этом состоянии.
52. Частица со спином  $1/2$  находится в состоянии с квантовыми числами  $(j, l, s, j_z)$ . Покажите, что направление спина (т.е. направление оси, вдоль которой проекция с достоверностью принимает значение  $1/2$ ) различно в различных точках пространства. Найти связь полярных углов этой оси с направлением радиус-вектора.
53. Найти средние значения различных компонент квадрупольного момента  $Q_{ik} = x_i x_k - 1/3 \delta_{ik} \vec{r}^2$  для частицы со спином  $1/2$  в состоянии с фиксированными  $j_z = l_z + s_z$ ,  $j^2$ ,  $l^2$ .
54. Найти средние значения компонент полного магнитного момента частицы  $\vec{\mu} = \mu_l \vec{l} + \mu_s \vec{s}$  в состоянии  $|j l s m_j\rangle$  с определенными значениями  $j, l, s, j_z = m_j$ .
55. Показать, что условие  $\rho^2 = \rho$  или  $\langle \ln \rho \rangle_\rho = 0$  есть н. и д. условие того, что смешанное состояние становится чистым.
56. Установить вид соотношения между дисперсиями некоммутирующих величин при их измерении в смешанном состоянии.
57. Равновесное состояние одномерного гармонического осциллятора в термостате с температурой  $T$  описывается матрицей плотности  $\rho = \exp(-\beta H) / \text{Tr}(\exp(-\beta H))$ , где  $H$  — гамильтониан осциллятора,  $\beta = 1/kT$ . Найти среднюю энергию осциллятора и ее дисперсию в этом состоянии. Вывести формулу Планка.
58. Система двух частиц со спином  $1/2$  находится в чистом состоянии

$$|\Psi\rangle = (|\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle) / \sqrt{3}.$$

Найти матрицы плотности смешанных состояний, в которых находится каждая из частиц по-отдельности.

59. Установить, при каких условиях на параметры  $\alpha, \beta, \gamma$  матрица

$$\rho = \begin{pmatrix} 1/2 + \alpha & \beta - i\gamma \\ \beta + i\gamma & 1/2 - \alpha \end{pmatrix}$$

будет спиновой матрицей плотности. Найти средние значения всех трех компонент спина в этом состоянии.

60. Определить отношение интенсивности пятен на экране в опыте Штерна-Герлаха, если отклоняющее градиентное магнитное поле ориентировано по оси  $\vec{n}$ , имеющей сферические углы  $\theta$  и  $\varphi$ , а состояние пучка электронов в представлении, где матрица  $s_z$  диагональна, описывается матрицей плотности:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1/2 + \alpha & \beta - i\gamma \\ \beta + i\gamma & 1/2 - \alpha \end{pmatrix}.$$

Установить, при каких  $\theta$  и  $\varphi$  отношение интенсивностей будет максимально (минимально).