Квантовая механика. 2-ой поток. 2011 г.
Редакция от 18.05.11
http://hep.phys.msu.ru

Attention! Уравнение Дирака будет подробно разбираться в осеннем семестре в конце курса и вопросы по нему будут обязательной составной частью заключительного экзамена.

Список задач дается в максимальном варианте, для разных групп он может уточняться семинаристом.

Теоретические вопросы

1. Комбинационный принцип и матричная механика Гейзенберга. Физические величины как эрмитовые операторы в гильбертовом пространстве.
2. Динамическая схема квантовой механики. Представления Гейзенберга и Шредингера. Переход от одного представления к другому. Оператор эволюции $U(t_2, t_1)$, его общий вид и основные свойства.
3. Принцип соответствия между классической и квантовой механикой, каноническое квантование.
4. Квантовомеханическая теория измерения. Спектр и средние значения физических величин. Измерение наблюдаемых с чисто дискретным невырожденным спектром и чистые состояния квантовой системы. Полный набор наблюдаемых.
5. Вероятностная интерпретация результатов измерения некоммутирующих величин. Соотношение неопределенностей Гейзенберга. Простейшие ЭПР-"парадоксы" и их обьяснение.
6. Совокупность чистых состояний квантовой системы как гильбертово пространство, его основные свойства. Принцип суперпозиции чистых состояний, его обоснование. Спектральное разложение эрмитового оператора и функций от него. Квантовомеханическая интерпретация дискретного и непрерывного спектров оператора наблюдаемой.
7. Изоморфизм представлений гильбертова пространства. Эквивалентность любого представления матричному. Переход от одного представления к другому как унитарное преобразование, его шредингеровска я и гейзенбергова формы. Взаимосвязь унитарных и канонических преобразований.
8. Координатное и импульсное представления. Волновая функция, ее вероятностная интерпретация. Переход от одного представления к другому.
9. Симметрии и интегралы движения в квантовой механике. Вырождение уровней энергии при наличии некоммутирующих интегралов движения.
10. Стационарные состояния, их основные свойства. Эволюция во времени состояний из дискретной и непрерывной частей энергетического спектра.
11. Матрицы плотности и смешанные состояния. Средние значения физических величин в смешанном состоянии. Основные свойства матриц плотности. Матрицы плотности подсистем, обьяснение простейших ЭПР-"парадоксов" с их помощью.
12. Квантование гармонического осциллятора методом операторов рождения-уничтожения. Когерентные состояния, их основные свойства.
13. Общие свойства уравнения Шредингера для нерелятивистской частицы в потенциальном поле. Уравнение непрерывности. Вариационный принцип для стационарного ур. Шредингера.
14. Квантовая механика частицы в потенциальном поле для одного пространственного измерения. Основные свойства дискретного спектра. Специфика одномерной потенциальной ямы с равновысокими стенками. Одномерное рассеяние на потенциале с регулярными асимптотиками $V(\pm\infty) = V_{\pm}$.
15. Одномерное уравнение Шредингера с периодическим потенциалом. Теорема Флоке, функции Блоха, квазиимпульс и зоны Бриллюэна.
16. Квазиклассическое (ВКБ) приближение, условие применимости. Квазиклассические волновые функции, их продолжение через точки поворота. Правило квантования Бора-Зоммерфельда.
17. Туннельный эффект в ВКБ-приближении. Волновые функции и разность энергий двух нижних уровней в потенциале вида "mexican hat".
18. Частица в центрально-симметричном поле. Разделение переменных. Орбитальный момент, собственные функции и собственные значения l^2 и l_z. Природа целочисленности орбитального момента. Кон ечный поворот как унитарное преобразование координатной волновой функции.
19. Радиальное ур-ние Шредингера. Граничное условие при $r = 0$, его обоснование. Общие свойства энергетического спектра и волновых функций связанных состояний в центрально-симметричном поле. Падение на центр. ВКБ-приближение для радиального уравнения.
20. Угловой момент и конечные повороты в общем случае. Перестановочные соотношения для компонент момента. Спектр операторов $J^2,\ J_z$. Матричные элементы компонент момента в базисе собственных векторов операторов $J^2,\ J_z$. Операторы спина частицы, матричные элементы и собственные вектора. Спин 1/2, основные свойства.
21. Векторное сложение двух моментов. Коэффициенты векторного сложения, их основные свойства и физический смысл. Коэффициенты сложения двух спинов 1/2 и спина 1/2 с орбитальным моментом l.

22. Операторы конечных вращений. Матрицы конечных вращений в параметризации Эйлера.
23. Скаляр и вектор в квантовой механике, их коммутаторы с компонентами полного углового момента системы как следствие законов преобразования при конечных поворотах. Показать, что скалярное произведение двух векторов есть скаляр, а векторное — (псевдо)вектор.
24. Правила отбора для матричных элементов от скаляра и вектора по состояниям $|JM\rangle$ с фиксированным полным моментом и его третьей проекцией. Показать, что для скаляра $\langle J'M'|\,A\,|JM\rangle = \delta_{JJ'}\delta_{MM'}\,\langle J|\,A\,|J\rangle$, для вектора $\langle JM|\vec{A}|JM'\rangle = \langle JM|\vec{J}|JM'\rangle \times \langle J|\vec{A}\vec{J}|J\rangle/J(J+1)$.
25. Пространственная инверсия в квантовой механике. Четность орбитального состояния. Тензоры и псевдотензоры (на примере скаляра и вектора). Правила отбора по четности.

Задачи

1. Найти дисперсию координаты и импульса для гармонического осциллятора, находящегося на n-ом энергетическом уровне.
2. Найти уровни энергии и вектора состояния одномерного гармонического осциллятора в постоянном внешнем поле
$$H = \hbar\omega(a^+a + 1/2) + f^*a + fa^+$$
3. Найти средние значения и дисперсии координаты и импульса осциллятора и корреляторы $\langle xp\rangle - \langle x\rangle\langle p\rangle$, $\langle px\rangle - \langle p\rangle\langle x\rangle$ в когерентном состоянии.
4. Найти явный вид эволюции по времени когерентного состояния гармонического осциллятора.
5. Исходя из условия минимизации соотношения неопределенностей между координатой и импульсом, найти явный вид волновых функций для когерентных состояний в координатном и импульсном представлениях.
6. Одномерный гармонический осциллятор в момент времени $t = 0$ находится в основном энергетическом состоянии. Затем при $t > 0$ он подвергается воздействию внешней силы $f(t)$. Найти явный вид оператора эволюции и вероятность обнаружить осциллятор в n-ом возбужденном энергетическом состоянии как функцию t.
7. Взаимодействие осциллятора с двухуровневой системой описывается гамильтонианом
$$H = \hbar\omega a^+a + \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_3 + \hbar\gamma(a\sigma_+ + a^+\sigma_-)$$
где $\sigma_\pm = (\sigma_1 \pm i\sigma_2)/2$, σ_i – матрицы Паули. Найти стационарные состояния и уровни энергии в такой системе, среднее значение и дисперсию энергии осциллятора в этих состояниях.
8. Взаимодействие осциллятора с двухуровневой системой описывается гамильтонианом
$$H = \hbar\omega a^+a + \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_3 + \hbar\gamma(a\sigma_+ + a^+\sigma_-)$$
где $\sigma_\pm = (\sigma_1 \pm i\sigma_2)/2$, σ_i – матрицы Паули. Найти как функцию времени вероятность одновременно обнаружить двухуровневую систему в верхнем энергетическом состоянии и осциллятора — в состоянии с m квантами, если при $t = 0$ двухуровневая система находилась в нижнем состоянии, а осциллятор — в с остоянии с n квантами.
9. В начальный момент времени плотность распределения координат свободной нерелятивистской частицы массы m имела гауссову форму. Как будет изменяться со временем ширина пакета ?
10. Найти уровни энергии и общее число связанных состояний в одномерной симметричной потенциальной яме $V(x) = -V_0,\ |x| < a,\ V(x) = 0, |x| > a$.
11. Найти число дискретных уровней энергии в потенциале $V(x) = -V_0[\delta(x-a) + \delta(x+a)]$ в зависимости от параметров потенциала.
12. Найти уровни энергии и общее число связанных состояний в одномерной потенциальной яме шириной a с разновысокими стенками $V_1 < V_2$.
13. Найти вероятность отражения частицы от полубесконечного барьера высоты V_0, если энергия частицы $E > V_0$.
14. Найти коэффициенты прохождения-отражения и соответствующие фазовые сдвиги при прохождении частицы через потенциальный барьер $V(x) = V_0\ \delta(x)$.
15. Найти точную вероятность туннелирования частицы сквозь одномерный потенциальный барьер $V(x) = V_0,\ |x| < a,\ V(x) = 0,\ |x| > a$ (энергия частицы меньше высоты барьера).
16. Найти точную вероятность отражения частицы при прохождении над одномерным потенциальным барьером $V(x) = V_0,\ |x| < a,\ V(x) = 0, |x| > a$ (энергия частицы больше высоты барьера).

17. Найти расположение зон Бриллюэна для одномерной решетки Дирака $V(x) = V_0 \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na)$, $V_0 > 0$.
18. Найти расположение нижних зон Бриллюэна для одномерной решетки Дирака $V(x) = V_0 \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na)$, $V_0 < 0$.
19. Методом ВКБ найти уровни энергии одномерного гармонического осциллятора.
20. В ВКБ-приближении найти уровни энергии частицы массы m в потенциальном поле вида $V(z) = \infty,\ z < 0, V(z) = mgz,\ z > 0$.
21. Пусть гамильтониан зависит от λ как от параметра и $H(\lambda)\,|\psi(\lambda)\rangle = E(\lambda)\,|\psi(\lambda)\rangle$. Показать, что для нормированных на единицу векторов $|\psi(\lambda)\rangle$ имеет место соотношение $\frac{\partial E(\lambda)}{\partial \lambda} = \langle\psi(\lambda)|\,\frac{\partial H(\lambda)}{\partial \lambda}\,|\psi(\lambda)\rangle$.
22. Доказать, что в состоянии с определенной энергией в центральносимметричном поле $V(r) = g * r^\gamma$ средние значения кинетической и потенциальной энергий связаны соотношением: $2\langle T\rangle = \gamma\langle V\rangle$ (теорема вириала).
23. С помощью оценки Баргмана описать основные свойства спектра связанных состояний у сферически-симметричного потенциала со степенной асимптотикой в нуле и на бесконечности.
24. Найти S-уровни энергии в сферически-симметричной яме: $V(r) = -V_0\ (r < a)$, $V(r) = 0\ (r > a)$.
25. Найти S-уровни энергии в сферической оболочке $V(r) = -V_0\delta(r - a)$.
26. В ВКБ-приближении установить закон α-распада для S-состояния, аппроксимируя потенциал ядра прямоугольным барьером $V(r) = V_0\ \theta(r_1 \le r \le r_2)$.
27. Найти уровни энергии связанных состояний в потенциале $V(r) = -A/r - B/r^2$ и кратность их вырождения.
28. Радиальная волновая функция стационарного состояния частицы массы m в исчезающем на бесконечности центральном поле $U(r)$ имеет вид $R(r) = r(1 - \alpha r)e^{-\beta r}$. Найти значение орбитального момента в этом состоянии, его энергию и явный вид потенциала $U(r)$.
29. Найти вероятность пребывания электрона в классически запрещенной области для водородоподобного атома в основном состоянии.
30. Вычислить среднее значение $\langle r^{-1}\rangle$, $\langle r^{-2}\rangle$, $\langle r^{-3}\rangle$ в состоянии с определенной энергией E_n и орбитальным моментом l в кулоновом поле притяжения.
31. Найти ср еднее значение и дисперсию расстояния между электроном и ядром для водородоподобного атома в n-ом возбужденном состоянии.
32. Найти среднее значение различных компонент квадрупольного момента $Q_{ik} = x_i x_k - 1/3\delta_{ik}\vec{r}^2$ для заряженной бесспиновой частицы, находящейся в кулоновом поле притяжения в стационарном состоянии с фиксированными n, l, m.
33. Найти уровни энергии бесспиновой заряженной частицы в постоянном однородном магнитном поле напряженности $\mathcal{H}$ в состоянии с фиксированным значением проекций импульса и орбитального момента на направление поля.
34. Определить энергетический спектр заряженной бесспиновой частицы, движущейся в однородном электрическом и однородном магнитном полях, направления напряженностей которых взаимно перпендикулярны.
35. Найти уровни энергии заряженного сферически симметричного осциллятора, помещенного в постоянное однородное магнитное поле напряженности $\mathcal{H}$, для состояний с фиксированной проекцией орбитального момента на направление поля.
36. Найти спектр оператора углового момента для планарной (пространственно-двумерной) системы.
37. Установить соотношение неопределенностей между дисперсиями проекций J_x , J_y момента в состоянии с фиксированным значением J_z.
38. Вычислить $f[aE + \vec{b}\vec{\sigma}]$, где E - единичная матрица, $\vec{\sigma}$ - матрицы Паули, а a и $\vec{b}$ - произвольные действительные число и вектор.
39. Найти спектр энергий заряженной частицы со спином $1/2$ и магнитным моментом $\vec{\mu} = \mu_0\vec{s}$ в постоянном однородном магнитном поле $\mathcal{H}$.
40. Частица массы m со спином $1/2$ и магнитным моментом $\vec{\mu} = \mu_0\vec{s}$ движется в неоднородном магнитном поле $\vec{\mathcal{H}} = \{0, -ky, \mathcal{H}_0 + kz\}$. Найти операторы $\vec{r}(t)$, $\vec{p}(t)$. Определить средние значения и дисперсию координат частицы, если в начальный момент времени частица н аходилась в координатном состоянии $\psi = \varphi(\vec{r})e^{ip_0x/\hbar}$, где $\varphi(\vec{r})$ действительная квадратично-интегрируемая функция, и чистом спиновом состоянии χ. Прецессией магнитного момента пренебречь.
41. Найти спиновые волновые функции системы двух частиц со спином $1/2$, которые являются собственными функциями операторов $\vec{s}^2 = (\vec{s}_1 + \vec{s}_2)^2$, $s_z = (s_1)_z + (s_2)_z$.
42. Протон и нейтрон находятся в синглетном состоянии по полному спину. Найти вероятности обнаружить у них одинаковые или различные значения проекции спина на ось $\vec{n}$ при одновременном измерении.

43. Выразить проекционные операторы на синглетное и триплетное состояния для системы из двух частиц со спином 1/2 через скалярное произведение их спинов $\vec{s}_1\vec{s}_2$.
44. Две частицы со спином 1/2 находятся в состоянии $|\Psi\rangle = \exp(i\varphi_1 s_{1x})\exp(i\varphi_2 s_{2y})\ |\uparrow\uparrow\rangle$. Найти вероятности обнаружить частицы в синглетном и триплетном состояниях по полному спину.
45. Гамильтониан системы двух взаимодействующих частиц со спином 1/2, помещенных в постоянное однородное магнитное поле, имеет вид

$$H = -(\mu_1\vec{s}_1 + \mu_2\vec{s}_2)\vec{\mathcal{H}} + \alpha\ \vec{s}_1\vec{s}_2\ .$$

Найти уровни энергии системы.

46. Найти вид операторов спина 1 в представлении, где S_z диагональна. Показать, что операторы спина 1 могут быть представлены также в виде $(S_l)_{jk} = i(\hbar)\epsilon_{jlk}$. Найти унитарное преобразование, связывающее эти два представления.
47. Определить отношение интенсивностей пятен на экране в опыте Штерна-Герлаха для поляризованного по оси z пучка частиц спина 1 и магнитным моментом $\vec{\mu} = \mu_0\vec{s}$, если отклоняющее магнитное поле ориентировано под углом θ к оси z.
48. Частица со спином 1/2 находится в поле центральных сил. Найти волн овые функции этой частицы, являющиеся одновременно собственными функциями трех коммутирующих операторов: $j_z = l_z + s_z$, j^2, l^2.
49. Частица со спином 1/2 находится в состоянии с квантовыми числами (j, l, s, j_z). Найти вероятности различных значений проекций орбитального и спинового моментов частицы l_z и s_z при их одновременном измерении в этом состоянии.
50. Частица со спином 1/2 находится в состоянии с квантовыми числами (j, l, s, j_z). Покажите, что направление спина (т.е. направление оси, вдоль которой проекция с достоверностью принимает значение 1/2) различно в различных точках пространства. Найти связь полярных углов этой оси с направлением радиус-вектора.
51. Найти средние значения различных компонент квадрупольного момента $Q_{ik} = x_i x_k - 1/3\delta_{ik}\vec{r}^2$ для частицы со спином 1/2 в состоянии с фиксированными $j_z = l_z + s_z,\ j^2,\ l^2$.
52. Найти средние значения компонент полного магнитного момента частицы $\vec{\mu} = \mu_l\vec{l} + \mu_s\vec{s}$ в состоянии $|jlsm_j\rangle$ с определенными значениями $j, l, s, j_z = m_j$.
53. Показать, что условие $\rho^2 = \rho$ или $\langle \ln\rho\rangle_\rho = 0$ есть н. и д. условие того, что смешанное состояние становится чистым.
54. Установить вид соотношения неопределенностей для некоммутирующих величин при их измерении в смешанном состоянии.
55. Равновесное состояние одномерного гармонического осциллятора в термостате с температурой T описывается матрицей плотности $\rho = \exp(-\beta H)/Tr(\exp(-\beta H))$, где H — гамильтониан осциллятора, $\beta = 1/kT$. Найти среднюю энергию осциллятора и ее дисперсию в этом состоянии. Вывести формулу Планка.
56. Система двух частиц со спином 1/2 находится в чистом состоянии

$$|\Psi\rangle = (|\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle)/\sqrt{3}.$$

Найти матрицы плотности смешанных состояний, в которых находится каждая из частиц по-отдельности.
57. Установить, при каких условиях на параметры α, β, γ матрица

$$\rho = \begin{pmatrix} 1/2+\alpha & \beta - i\gamma \\ \beta + i\gamma & 1/2-\alpha \end{pmatrix}$$

будет спиновой матрицей плотности. Найти средние значения всех трех компонент спина в этом состоянии.
58. Определить отношение интенсивности пятен на экране в опыте Штерна-Герлаха, если отклоняющее градиентное магнитное поле ориентировано по оси $\vec{n}$, имеющей сферические углы θ и φ, а состояние пучка электронов в представлении, где матрица s_z диагональна, описывается матрицей плотности:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1/2+\alpha & \beta - i\gamma \\ \beta + i\gamma & 1/2-\alpha \end{pmatrix}.$$

Установить, при каких θ и φ отношение интенсивностей будет максимально (минимально).