Вопросы и задачи к зачету по курсу
"Квантовая теория" (II поток) май 2010 г.

(*В каждой конкретной группе список задач может корректироваться преподавателем, ведущим семинарские занятия.*)

`http://hep.phys.msu.ru` `http://hepqt.itpm.msu.su`

Теоретические вопросы

1. Гильбертово пространство. Базис. Унитарные, эрмитовы и проекционные операторы. Их физический смысл.
2. Спектральное разложение эрмитова оператора. Случай непрерывного спектра. Определение функции от оператора. Теоремы о коммутаторах эрмитовых операторов и их собственных векторах.
3. Результаты измерения наблюдаемой. Матрица плотности, ее свойства, условие нормировки.
4. Чистое состояние. Матрица плотности чистого состояния. Описание чистого состояния с помощью вектора гильбертова пространства. Принцип суперпозиции, его обоснование.
5. Совместимые и несовместимые наблюдаемые. Полный набор наблюдаемых. Соотношение неопределенностей.
6. Пространство состояний составной системы. Нахождение матрицы плотности подсистемы. Примеры всех возможных комбинаций чистых и смешанных состояний у системы и подсистем.
7. "Парадоксы" квантовой механики. "Парадокс" ЭПР (Эйнштейна, Подольского, Розена). "Парадокс" GHZ (Greenberger, Horne, Zeilinger).
8. Представления Гайзенберга и Шредингера, связь между ними, формальные решения уравнений Гайзенберга и Шредингера.
9. Стационарные состояния. Симметии и интегралы движения. Оператор эволюции и его свойства. Выражение для оператора эволюции в случае гамильтониана, зависящего от времени.
10. Координатное и импульсное представление. Их связь. Операторы трансляции в кординатном и импульсном пространстве.
11. Общие свойства спектра при одномерном движении. Дискретный спектр, непрерывный спектр, кратность вырождения. Осцилляционная теорема. Четный потенциал.
12. Непрерывный спектр и одномерное рассеяние. Рассеяние волновых пакетов.
13. Периодический потенциал, спектр и волновые функции. Периодический потенциал и конечный отрезок периодического потенциала.
14. Квазиклассическое приближение. Условие применимости. Условие сшивания в точках поворота.
15. Правила квантования Бора-Зоммерфельда. Коэффициент туннелирования. Условия применимости.
16. Координатное и импульсное представление в 3-мерном случае. Поток вероятности, уравнение непрерывности. Вариационный принцип Ритца.
17. Теория момента. Матричные элементы оператора момента. Спин. Орбитальный момент.
18. Сложение моментов. Коэффициенты Клебша-Гордона. Старшие вектора.
20. Центрально-симметричное поле. Радиальное уравнение Шредингера, граничное условие.
21. Центрально-симметричное поле. Оценка на количество уровней и ее следствия. Падение на центр.

Задачи

1. Вычислить $f(b + \vec{a} \cdot \vec{\sigma})$.
2. Известно, что $[\hat{A}, \hat{B}] = -i\hat{B}$ и $\exp(z\hat{A})B\exp(-z\hat{A}) = i\hat{B}$. Найти все возможные значения z.
3. Вычислить $\exp(i\varphi\hat{l}_x)\hat{p}_y\,\hat{z}\exp(-i\varphi\hat{l}_x)$.
4. Вычислить
$$\exp(i\varphi\hat{l}_x) \cdot \exp(ia\hat{p}_y) \cdot \exp(-i\varphi\hat{l}_x)$$
5. Одномерный гармонический осциллятор. Вычислить
$$\exp\left(\alpha\hat{a}^+\hat{a}\right) \cdot \hat{x} \cdot \exp\left(-\alpha\hat{a}^+\hat{a}\right)$$
6. Двумерный осциллятор. Вычислить
$$\exp\Big(\xi(\hat{a}_x^+\hat{a}_y - \hat{a}_y^+\hat{a}_x)\Big) \cdot \hat{x} \cdot \exp\Big(-\xi(\hat{a}_x^+\hat{a}_y - \hat{a}_y^+\hat{a}_x)\Big)$$

—

7. Волновая функция спина 1/2 равна
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix}1-i\\2+i\end{pmatrix}$$
Куда направлен спин (θ=?, φ=?). Найти вероятности попадания в верхний и нижний пучок в приборе Штерна-Герлаха с полем, ориентированным по оси $\vec{n}'(\theta',\varphi')$. Найти среднее значение проекции спина на ось $\vec{n}'(\theta',\varphi')$. Показать, что ответы для среднего значения и вероятностей согласованы.
8. Волновая функция спина 1/2 равна
$$|\psi\rangle = \exp[i(\beta/2)(-\sin\alpha\sigma_1+\cos\alpha\sigma_2)]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
Куда направлен спин (θ=?, φ=?). Найти вероятности попадания в верхний и нижний пучок в приборе Штерна-Герлаха с полем, ориентированным по оси $\vec{n}'(\theta',\varphi')$. Найти среднее значение проекции спина на ось $\vec{n}'(\theta',\varphi')$. Показать, что ответы для среднего значения и вероятностей согласованы.
9. Пучок частиц со спином 1/2 в состоянии
$$\hat{\rho} = (1/2) + (1/2)\,\xi\,\vec{\sigma}\cdot\vec{n}(\theta,\varphi)$$
влетает в прибор Штерна-Герлаха с магнитным полем, ориентированным по оси z. Найти отношение интенсивностей верхнего и нижнего пятна. Как надо направить поле, чтобы это отношение стало максимальным? Чему равно это максимальное отношение?
10. Матрица плотности спина 1/2 равна
$$\rho = \begin{pmatrix}1/4 & 1/8-i/8\\1/8+i/8 & 3/4\end{pmatrix}$$
Найти направление поляризации и степень поляризации. Найти вероятности попадания в верхний и нижний пучок в приборе Штерна-Герлаха с полем, ориентированным по оси $\vec{n}'(\theta',\varphi')$. Найти среднее значение проекции спина на ось $\vec{n}'(\theta',\varphi')$. Показать, что ответы для среднего значения и вероятностей согласованы.
11. Пучок частиц со спином 1/2, ориентированным по оси x, влетает в прибор Штерна-Герлаха с полем по оси z. На выходе из прибора верхний пучок пролетает область магнитного поля H_z, время пролета τ. После этого пучки сводят вместе и направляют в прибор Штерна-Герлаха с полем по оси x. Найти отношение интенсивностей пятен.

—

12. Матрица плотности одномерного гармонического осциллятора имеет вид
$$\hat{\rho} = (1/3)\Big(2\,|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| + i\,|0\rangle\langle 1| - i\,|1\rangle\langle 0|\Big)$$
Найти среднее значение и дисперсию энергии, среднее значение и дисперсию импульса в этом состоянии.
13. Одномерный гармонический осциллятор. Вычислить
$$\langle\alpha|\hat{x}\hat{p}|\alpha\rangle - \langle\alpha|\hat{x}|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle$$
$$\langle\alpha|\hat{p}\hat{x}|\alpha\rangle - \langle\alpha|\hat{x}|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle$$
14. Одномерный гармонический осциллятор. Вычислить $\langle\alpha|\hat{x}|\beta\rangle$, $\langle\alpha|\hat{p}|\beta\rangle$. Как убывает ответ с ростом $|\alpha-\beta|$?
15. Одномерный гармонический осциллятор. В координатном и импульсном представлениях найти явный вид волновых функций для когерентного состояния $|\alpha\rangle$.
16. Одномерный гармонический осциллятор. Вычислить
$$\langle n|\hat{x}^{\,4}|n\rangle \qquad \langle n|\hat{x}^{\,3}|m\rangle$$
17. Одномерный гармонический осциллятор. Вычислить
$$\langle n|\hat{p}^{\,4}|n\rangle \qquad \langle n|\hat{p}^{\,3}|m\rangle$$

18. Волновая функция осциллятора имеет вид

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0} \exp(-\alpha n)\sqrt{1-\exp(-2\alpha)}\ |n\rangle$$

Найти средние значения и дисперсии координаты и импульса.

19. Матрица плотности осциллятора имеет вид

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0} \exp(-\alpha n)\big(1-\exp(-\alpha)\big)\ |n\rangle\langle n|$$

Найти средние значения и дисперсии координаты и импульса.

20. Волновая функция осциллятора имеет вид

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\alpha\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\beta\rangle$$

Полагая $\langle\alpha|\beta\rangle \ll 1$, найти средние значения и дисперсии координаты и импульса.

21. Найти уровни энергии и волновые функции системы

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} + \frac{qy^2}{2} + \alpha xy$$

—

22. Найти уровни энергии в потенциале

$$V(x) = -V_0\delta(x-a) - V_0\delta(x+a) + U_0\theta(a-|x|)$$

($\theta(x>0)=1$, $\theta(x<0)=0$).

23. Найти уровни энергии в потенциале $V(x)=\infty$ при $|x|>a$, $V(x)=0$ при $b<|x|<a$, $V(x)=U_0$ при $|x|<b$.

24. Найти уровни энергии в потенциале

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x<a \\ V_0\delta(x-c) & a<x< \\ U_0 & \quad <x<b \\ \infty & x>b \end{cases}$$

25. Найти уровни энергии в потенциале

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x<-a \\ V_0\delta(x+b)+V_0\delta(x-b) & -a<x<a \\ \infty & x>a \end{cases}$$

26. Найти уровни энергии в потенциале

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x<-a \\ -U_0+V_0\delta(x) & -a<x<a \\ 0 & x>a \end{cases}$$

27. Найти уровни энергии в потенциале

$$V(x) = -V_0\delta(x-a) - V_0\delta(x+a)$$

28. Найти уровни энергии в потенциале

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x<0 \\ -U_0+V_0\delta(x-a) & 0<x<a \\ 0 & x>a \end{cases}$$

29. Найти коэффициенты отражения и прохождения для потенциала $V(x) = V_0\delta(x) + U_0\theta(x)$ $(\theta(x > 0) = 1, \theta(x < 0) = 0)$.

—

30. Найти расположение разрешенных зон для одномерной решетки Дирака

$$V(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_0\delta(x - na)$$

31. Найти в квазиклассическом приближении уровни энергии в потенциале $V(x < 0) = \infty$, $V(x > 0) = kx^2/2$. Сравнить с точным ответом.
32. Найти в квазиклассическом приближении коэффициент надбарьерного отражения на потенциале $V(x < 0) = 0$, $V(0 < x < a) = U_0x/a$, $V(a < x) = U_0$. Сравнить с точным ответом при $a \to 0$.
33. Найти зависимость времени жизни α-активного ядра от энергии вылетающей α-частицы.
34. Найти зависимость тока холодной эмиссии от величины приложенного электрического поля.

—

35. Найти уровни энергии для сферической оболочки $V(r) = -V_0\delta(r - a)$.
36. Найти уровни энергии в сферически-симметричном потенциале $V(r) = -U_0\theta(a - r) + V_0\delta(r - a)$ $(\theta(x > 0) = 1, \theta(x < 0) = 0)$.
37. Найти уровни энергии в шаровом слое $V(r < a) = \infty$, $V(r > c) = \infty$, $V(a < r < b) = A/r^2$, $V(b < r < c) = 0$.
38. Найти уровни энергии в трехмерном сферически-симметричном потенциале при $l \neq 0$:

$$V(r) = \begin{cases} \infty & r < a \\ 0 & a < r < b \\ V_0 & b < r < c \\ \infty & r > c \end{cases}$$

39. Найти уровни энергии в трехмерном сферически-симметричном потенциале при $l \neq 0$:

$$V(r) = \begin{cases} V_0\delta(r - a) & r < b \\ \infty & r > b \end{cases}$$

40. Найти уровни энергии в трехмерном сферически-симметричном потенциале при $l \neq 0$:

$$V(r) = \begin{cases} -U_0 & r < a \\ A/r^2 & r > a \end{cases}$$

41. Найти уровни энергии в трехмерном сферически-симметричном потенциале:

$$V(r) = \begin{cases} A/r^2 & r < a \\ A/a^2 & a < r < b \\ \infty & r > b \end{cases}$$

42. Найти среднее значение кинетической энергии, потенциальной энергии, центробежного потенциала и величины $1/r^3$ для атома водорода, который находится в состоянии $|\psi_{nlm}\rangle$.

—

43. Вычислить

$$\langle l'm'|l_x l_y|lm\rangle \qquad \langle l'm'|l_y l_x|lm\rangle$$

44.

$$|\psi\rangle = \exp(i\varphi l_x)|lm\rangle$$

найти

$$\langle\psi|l_y|\psi\rangle$$

45. Система двух спинов 1/2 находится в состоянии

$$|\psi\rangle = \exp(i\varphi S_x)|\uparrow\uparrow\rangle$$

Чему равны вероятности $P_{S=1,S_z=1}$, $P_{S=1,S_z=0}$, $P_{S=1,S_z=-1}$?

46. Система двух спинов 1/2 находится в состоянии $S = 0$. Оба спина пропускают сквозь прибор Штерна-Герлаха с полем, ориентированным по оси $\vec{n}(\theta,\varphi)$. Найти вероятности всех 4 возможных результатов (вв,вн,нв,нн).
47. Гамильтониан системы двух спинов 1/2 имеет вид

$$\hat{H} = -2\mu_1 s_z^{(1)} H_z - 2\mu_2 s_z^{(2)} H_z + \alpha \vec{s}^{\,(1)} \cdot \vec{s}^{\,(2)}$$

Найти уровни энергии и соответствующие волновые функции.

48. Волновая функция системы двух спинов имеет вид

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|\uparrow\uparrow\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|\uparrow\downarrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|\downarrow\uparrow\rangle$$

Найти матрицы плотности первого и второго спинов и вероятность того, что полный спин равен 0.

49. Матрица плотности системы двух спинов имеет вид

$$\hat{\rho} = \frac{1}{3}|\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + \frac{1}{3}|\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + \frac{1}{3}|\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + \frac{1}{9}|\uparrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| + \frac{1}{9}|\downarrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow|$$

Найти матрицы плотности первого и второго спинов и вероятность того, что полный спин равен 1.

50. Волновая функция системы двух спинов имеет вид

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\exp(i\alpha S_x)|\uparrow\uparrow\rangle + \frac{1}{2}\exp(i\beta S_y)(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

Найти матрицы плотности первого и второго спинов и вероятность того, что полный спин равен 1.

51. Сложение двух спинов 1/2. Вычислить

$$\langle S=1, S_z=0|s_x^{(2)}|S=1, S_z=1\rangle \qquad \langle S=1, S_z=-1|s_y^{(2)}|S=0, S_z=0\rangle$$

$$\langle S=0, S_z=0|s_z^{(1)}|S=1, S_z=0\rangle$$

52. Сложение орбитального момента и спина. Вычислить

$$\langle j=l-1/2, m_j=m+1/2|s_y|j=l-1/2, m_j=m-1/2\rangle$$

$$\langle j=l+1/2, m_j=m-1/2|s_x|j=l-1/2, m_j=m+1/2\rangle$$

$$\langle j=l+1/2, m_j=m+1/2|s_z|j=l-1/2, m_j=m+1/2\rangle$$

53. Сложение орбитального момента и спина. Вычислить

$$\langle j=l-1/2, m_j=m+1/2|l_x|j=l-1/2, m_j=m-1/2\rangle$$

$$\langle j=l+1/2, m_j=m-1/2|l_y|j=l-1/2, m_j=m+1/2\rangle$$

$$\langle j=l+1/2, m_j=m+1/2|l_z|j=l-1/2, m_j=m+1/2\rangle$$

54. Частица со спином 1/2 находится в состоянии $|jlsm_j\rangle$. Найдите направление спина $\vec{n}(\tilde{\theta},\tilde{\varphi})$ в точке с координатами (r,θ,φ).
55. Показать, что если A — скалярный оператор, то

$$\langle l'm'|A|lm\rangle = \delta_{l'l}\delta_{m'm}a(l)$$

т.е. его матричные элементы диагональны по l, диагональны по m, не зависят от m.

56. Сложение моментов $l_1 = 2$ и $l_2 = 1$. Вычислить

$$|L = 1, M = 1\rangle \qquad |L = 1, M = 0\rangle \qquad |L = 1, M = -1\rangle$$

57. Сложение моментов $l_1 = 1$ и $l_2 = 1$. Вычислить все коэффициенты Клебша Гордона.

—

58. Спин 1/2 помещен в магнитное поле

$$\vec{H}(t) = (H_1 \cos \Omega t, H_1 \sin \Omega t, H_0)$$

В момент времени $t = 0$ спин был ориентирован вверх. Найти вероятность переворота спина в момент времени t.

59. Одномерный гармонический осциллятор в момент времени $t = 0$ находится в основном состоянии. Затем он на интервале $0 < t < t_0$ подвергается воздействию постоянной силы $f(t) = f_0$. Найти вероятность обнаружить его на n-ом уровне в момент времени t.

60. Линейный гармонический осциллятор в начальный момент времени находится в состоянии $|0\rangle$. При $0 < t < 2\pi/\Omega$ на него действует классическая сила $f(t) = f_0 \sin(\Omega t)$. Найти волновую функцию $|\psi(t)\rangle$ и вероятность пребывания в состоянии $|n\rangle$ в произвольный момент времени t.

61. Одномерный гармонический осциллятор в момент времени $t = 0$ находился в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$. Найти волновую функцию в момент времени t. Вычислить средние значения координаты и импульса и их дисперсию в момент времени t.

62. Гамильтониан системы двух частиц со спином 1/2 имеет вид

$$\hat{H} = -2\mu_0(s_z^{(1)} - s_z^{(2)})H_z$$

Найти вероятность того, что полный спин системы равен нулю в момент времени t, если в момент времени $t = 0$ спин первой частицы был ориентирован вдоль оси x, а второй — против оси x.

63. Симметричный двумерный гармонический осциллятор в начальный момент времени находится в состоянии

$$|\psi(t = 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|10\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|00\rangle$$

Найти волновую функцию $|\psi(t)\rangle$, среднее значение и дисперсию x, y, p_x, p_y в произвольный момент времени t.

64. Линейный гармонический осциллятор в начальный момент времени находится в состоянии

$$\rho(t = 0) = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|0\rangle\langle 1| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1|$$

Найти матрицу плотности, среднее значение и дисперсию координаты и импульса в произвольный момент времени t.