

# МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

## физический факультет

Квантовая теория (I поток) январь 2008 г.

<http://hep.itpm.msu.su>; <http://hepqt.itpm.msu.su>

### Теоретические вопросы

1. Кинематический постулат Гайзенберга. Уравнения Гайзенберга. Изменение величин во времени как унитарное преобразование матриц. Законы сохранения.
2. Средние значения динамических переменных. Матрица плотности. Смешанные и чистые состояния.
3. Чистые состояния. Вектор чистого состояния. Формула для средних значений в чистом состоянии.
4. Координатное и импульсное пространства. Соотношение неопределенностей Гайзенберга.
5. Уровни энергии и соответствующие собственные векторы гармонического осциллятора.
6. Гармонический осциллятор в координатном и импульсном представлениях.
7. Гармонический осциллятор с тремя степенями свободы. Симметрия и кратность вырождения уровней изотропного осциллятора.
8. Момент количества движения. Определение операторов и их спектр. Полный набор наблюдаемых.
9. Матричные элементы операторов момента количества движения. Определение скалярного оператора. Матричный элемент скаляра.
10. Критерий вырождения уровней энергии. Вырождение уровней энергии и свойства симметрии гамильтониана.
11. Уровни энергии в кулоновом поле. Кратность уровней энергии. Состояния атома водорода с определенной энергией.
12. Вектор Лапласа-Рунге-Ленца. Группа инвариантности гамильтониана атома водорода.
13. Сложение моментов количества движения. Явные формулы в случае произвольного  $j_1$  и  $j_2 = \frac{1}{2}$ .
14. Описание эволюции физических систем. Представления Гайзенберга, Шредингера, Дирака.
15. Тонкая структура уровней энергии водорода.
16. Теория возмущений.
17. Атом Томаса-Ферми.
18. Уравнения самосогласованного поля
19. Принцип неразличимости и структура атома.
20. Приближение центрального поля. Конфигурации, термы. Правила Хунда. Тонкая структура уровней в схеме  $LS$ -связи.
21. Квантование электромагнитного поля. Операторы векторного потенциала, электрической и магнитной напряженностей.
22. Операторы энергии и импульса электромагнитного поля. Состояния с определенным числом частиц, определенной энергией и определенным импульсом.
23. Скорости переходов.
24. Взаимодействие атомов с электромагнитным полем. Вероятность излучения и поглощения фотона. Формула Планка.
25. Дипольное приближение.
26. Скорость перехода при рассеянии. Борновское приближение.
27. Потенциальное рассеяние. Сечение рассеяния.

28. Борновское приближение в потенциальном рассеянии. Форм-фактор.
29. Резонансное рассеяние.
30. Вторичное квантование.
31. Гамильтониан системы частиц с парным взаимодействием в представлении вторичного квантования.

### Задачи

1. Найти явный вид матрицы  $\exp(i\frac{\varphi}{2}\vec{m}\vec{\sigma})$ .
2. Спин  $\frac{1}{2}$  с достоверностью направлен вдоль оси  $\vec{n}$ . Какова вероятность найти его направленным вдоль оси  $\vec{m}$ .
3. Сумма  $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$  спинов  $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$  равна нулю. Найти вероятность того, что угол между спинами равен  $\vartheta$ .
4. Сумма  $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$  спинов  $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$  равна нулю. Найти вероятность того, что первый спин направлен вдоль оси  $\vec{n}_1$ , если направление второго спина не фиксируется.
5. Найти средние значения и дисперсии импульса и координаты гармонического осциллятора в состоянии с определенной энергией.
6. Гармонический осциллятор находится в когерентном состоянии со средней энергией  $E$ . Найти средние значения и дисперсии импульса и координаты.
7. Гармонический осциллятор находится в тепловом равновесии с термостатом при температуре  $T$ . Найти средние значения и дисперсии импульса и координаты.
8. Найти плотность распределения импульсов в основном состоянии гармонического осциллятора.
9. Получить уравнение Шредингера для гармонического осциллятора в импульсном пространстве.
10. Найти уровни энергии в потенциальной яме

$$V(x) = \infty, \quad x < 0; \quad V(x) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 x^2, \quad x > 0.$$

11. Частица находится в потенциальной яме

$$V(x) = \infty, \quad x < 0, \quad x > a; \quad V(x) = 0, \quad 0 < x < a.$$

Найти среднее значение и дисперсию энергии в состоянии

$$\Psi(x) = Cx(a-x).$$

12. Частица помещена в потенциальную яму

$$V(x) = \infty, \quad x < 0, \quad x > a; \quad V(x) = 0, \quad 0 < x < a.$$

Найти давление на стенку, если частица находится в основном состоянии.

13. Частица находится в потенциальной яме

$$V(x) = \infty, \quad x < 0, \quad x > a; \quad V(x) = 0, \quad 0 < x < a.$$

Найти плотность распределения импульса и координаты в состоянии с определенной энергией. Найти слабый предел этих величин при  $n \rightarrow \infty$ .

14. Частица помещена в потенциальную яму

$$V(x) = 0, \quad x < -a, \quad x > a; \quad V(x) = -V_0, \quad 0 < x < a, \quad V_0 > 0.$$

Какова вероятность найти частицу вне ямы, если она находится в основном состоянии.

15. Найти уровни энергии, плотность распределения координат и импульсов в основном состоянии в потенциале

$$V(x) = -G\delta(x), \quad G > 0.$$

16. Найти коэффициенты прохождения и отражения на потенциале

$$V(x) = 0, \quad x < -a, \quad x > a; \quad V(x) = V_0, \quad -a < x < a, \quad V_0 > 0.$$

17. В квазиклассическом приближении найти коэффициенты прохождения и отражения на потенциале

$$V(x) = \frac{V_0}{ch^2(ax)}$$

при  $E < V_0$ .

18. В квазиклассическом приближении найти уровни энергии для потенциалов

$$V(x) = \infty, \quad x < 0, \quad V(x) = Gx, \quad G > 0, \quad 0 < x.$$

и

$$V(x) = G|x|, \quad G > 0.$$

19. Приближая потенциал симметричной двойной ямы выражением

$$V(x) = \frac{1}{2}\mu\omega^2(|x| - x_0)^2,$$

выразить в квазиклассическом приближении энергию расщепления в терминах энергии основного состояния в простой яме и значения потенциала в середине ямы:

$$\delta E = 4E\sqrt{\frac{V(0)}{E}}\exp\left(-\frac{V(0)}{E}\right).$$

20. Найти коммутатор  $[\vec{r}\vec{p}, F(\vec{r})]$ .

21. Найти коммутатор  $[\vec{r}\vec{p}, F(\vec{p})]$ .

22. Найти коммутатор  $[l_\alpha, F(\vec{r})]$ .

23. Найти коммутатор  $[l_\alpha, F(\vec{p})]$ .

24. Найти составляющие вектора плотности потока в сферическом базисе.

25. Получить явный вид сферических гармоник для  $l = 0$  и  $l = 1$ .

26. Найти неопределенность радиуса электрона в атоме водорода, если он находится в состоянии с определенными  $n$  и  $l$ .

27. Найти средний радиус атома водорода в состоянии с  $n = 2$ .

28. Найти средние  $\langle 1/r \rangle$ ,  $\langle 1/r^2 \rangle$ ,  $\langle 1/r^3 \rangle$  в состояниях атома водорода с определенными  $n$  и  $l$ .

29. Найти плотность распределения импульсов в основном состоянии атома водорода. Найти среднее значение квадрата скорости электрона в основном состоянии атома водорода.

30. Найти среднее значение электрического потенциала атома водорода, находящегося в основном состоянии.
31. Найти плотность распределения координат и импульсов в основном состоянии изотропного гармонического осциллятора.
32. Получить уравнение Шредингера для частицы в кулоновом поле в импульсном пространстве.
33. Пользуясь формулами теории возмущений найти сдвиг уровней заряженного гармонического осциллятора под действием однородного электрического поля. Полученный результат сравнить с точным.
34. Найти сдвиг уровня энергии основного состояния водородоподобного атома, обусловленный неточностью ядра. Ядро считать однородно заряженной сферой радиуса  $R$ . Рассмотреть случаи, когда заряженная частица является электроном или  $\mu$ -мезоном.
35. Найти уровни энергии ангармонического осциллятора с гамильтонианом

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1,$$

в котором поправка к гамильтониану гармонического осциллятора равна

$$\hat{H}_1 = \alpha x^3 + \beta x^4.$$

36. Частица со спином  $\frac{1}{2}$  находится в состоянии с определенным полным моментом количества движения  $J$ , моментом импульса  $l$ . Найти направление спина, если радиус-вектор частицы направлен вдоль вектора  $\vec{n}$ .
37. Решить уравнения Гайзенберга для свободной точечной частицы.
38. Решить уравнения Гайзенберга для гармонического осциллятора.
39. Найти изменение во времени средних значений и дисперсий импульса и координаты гармонического осциллятора в когерентном состоянии.
40. Показать, что спин  $\frac{1}{2}$ , помещенный в однородное магнитное поле прецессирует вокруг направления поля.
41. Решить уравнения Гайзенберга для спина  $\frac{1}{2}$  в однородном магнитном поле.
42. Найти составляющие тонкой структуры уровня  $1s_{1/2}$  атома водорода.
43. Найти составляющие тонкой структуры уровня  $2s_{1/2}$  атома водорода.
44. Найти составляющие тонкой структуры уровня  $2p_{1/2}$  атома водорода.
45. Найти сверхтонкую структуру уровня  $1s$  атома водорода. Магнитный момент протона равен  $\mu_p = 2.79\mu_N$ .
46. Найти число возможных состояний, терм с наименьшей энергией и значение полного момента количества движения основного состояния в конфигурации  $np^2$ .
47. Найти число возможных состояний, терм с наименьшей энергией и значение полного момента количества движения основного состояния в конфигурации  $np^3$ .
48. Какова четность и символ  ${}^a K_b$  основного состояния атома  ${}_6C$ ?
49. Какова четность и символ  ${}^a K_b$  основного состояния атома  ${}_7N$ ?
50. Какова четность и символ  ${}^a K_b$  основного состояния атома  ${}_{10}Ne$ ?
51. Описать расщепление основного уровня атома  ${}_5B$  в слабом магнитном поле.
52. Описать расщепление основного уровня атома  ${}_{11}Na$  в слабом магнитном поле.
53. Найти парамагнитную восприимчивость натрия ( $Z = 11, A = 23, \rho = 1g/cm^3$ ) в рамках модели Томаса-Ферми.
54. В рамках модели Томаса-Ферми найти соотношение между кинетической и потенциальной энергиями атома.

55. В рамках модели Томаса-Ферми оценить зависимость от атомного номера среднего расстояния электрона от ядра, средней скорости электрона, среднего момента импульса электрона.
56. В рамках модели Томаса-Ферми оценить зависимость от атомного номера средней кинетической энергии атома, полной энергии атома.
57. В рамках модели Томаса-Ферми получить формулу для числа электронов, находящихся в  $s$ -состоянии.
58. В рамках модели Томаса-Ферми получить формулу, определяющие значения  $Z$ , при которых в атоме впервые появляются электроны с заданным значением  $l$ .
59. В борновском приближении найти дифференциальное и полное сечения рассеяния на потенциале  $V(r) = g \frac{1}{r} \exp(-\mu r)$ .
60. В борновском приближении найти дифференциальное и полное сечения рассеяния на потенциале  $V(r) = g \exp(-\frac{r^2}{2a^2})$ .
61. В борновском приближении найти дифференциальное и полное сечения рассеяния на потенциале  $V(r) = g\theta(r_0 - r)$ .
62. В борновском приближении найти дифференциальное сечение рассеяния на кулоновом потенциале
63. В борновском приближении найти дифференциальное и полное сечения рассеяния электрона на атоме водорода.
64. Найти в дипольном приближении время жизни (в секундах и атомных единицах времени)  $2p$ -уровня атома водорода.
65. Найти энергию атома гелия с помощью вариационного принципа.
66. В первом исчезающем порядке теории возмущений найти энергию взаимодействия двух атомов водорода на больших расстояниях (силы Ван-дер-Ваальса) и ее зависимость от обменных эффектов.
67. Найти расщепление уровней энергии атома водорода в слабом по величине напряженности однородном магнитном поле  $\vec{\mathcal{H}}$ , когда  $\frac{e\hbar}{2mc} \mathcal{H} \ll |\Delta E_{jj'}|$  (нормальный эффект Зеемана).
68. Рассчитать расщепление уровня атома водорода с  $n = 2$  в среднем по величине напряженности однородном магнитном поле  $\vec{\mathcal{H}}$ , когда  $\frac{e\hbar}{2mc} \mathcal{H} \simeq |\Delta E_{jj'}|$ .
69. Рассчитать расщепление уровня атома водорода с  $n = 2$  в сильном по величине напряженности однородном магнитном поле  $\vec{\mathcal{H}}$ , когда  $\frac{e\hbar}{2mc} \mathcal{H} \gg |\Delta E_{jj'}|$ .
70. Рассчитать расщепление уровня атома водорода с  $n = 2$  в сильном по величине напряженности однородном электрическом поле (эффект Штарка велик по сравнению с тонкой структурой).
71. Рассчитать расщепление уровня атома водорода с  $n = 2$  в слабом по величине напряженности однородном электрическом поле (эффект Штарка мал по сравнению с тонкой структурой).
72. Рассчитать расщепление уровня атома водорода с  $n = 2$  в среднем по величине напряженности однородном электрическом поле (эффект Штарка одного порядка с тонкой структурой).
73. Оценить энергию ионизации возбужденного электрона для пара- и орто-гелия. Возбужденный электрон находится в состоянии  $nl$ , второй электрон в состоянии  $1s$  и полностью экранирует одну единицу заряда ядра.
74. Нейтральная частица со спином  $1/2$  находится в однородном магнитном поле, изменяющемся во времени по закону  $\vec{\mathcal{H}} = H(\sin \theta \cos \omega t, \sin \theta \sin \omega t, \cos \theta)$ . В момент времени  $t = 0$  проекция спина на направление поля была равна  $+1/2$ . Определить вероятность перехода частицы к моменту времени  $t$  в состояние, в котором проекция спина на направление магнитного поля равна  $-1/2$ .
75. Найти вероятность перехода атома трития  $H^3$  из  $1s$  состояния в  $1s$  состояние иона  $He^{3+}$  при  $\beta$ -распаде одного из нейтронов ядра.

76. Двухуровневая система с состояниями  $|1\rangle, |2\rangle$ , энергии которых есть  $\hbar\omega_1, \hbar\omega_2$ , подвергается действию не зависящего от времени возмущения  $W$ . Вычислить вероятность обнаружить то или иное состояние в момент времени  $t$ , если в момент времени  $t = 0$  система находилась в основном состоянии.
77. Гамильтониан резонансного взаимодействия однофотонного излучения (фотонов данного волнового числа и поляризации) с двухуровневой системой имеет вид:

$$H = \hbar\omega a^\dagger a + (\hbar\omega/2)\sigma_3 + \hbar\gamma(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-)$$

где  $\sigma_\pm = (\sigma_1 \pm i\sigma_2)/2$ ,  $\sigma_i$  – матрицы Паули. Найти вероятность обнаружить систему в момент времени  $t$  на нижнем уровне с  $m$  фотонами, если в момент времени  $t = 0$  система находилась на верхнем уровне с  $n$  фотонами.

78. В борновском приближении вычислить дифференциальное и полное сечение неупругого рассеяния электрона на неподвижном атоме водорода с возбуждением атома из  $1s$  в  $2s$ .
79. Вычислить дифференциальное сечение упругого рассеяния быстрых электронов на атоме водорода, находящемся в основном состоянии.
80. В борновском приближении найти амплитуду и дифференциальное сечение упругого рассеяния заряженной бесспиновой частицы на локализованном распределении заряда  $\rho(\vec{r})$ .
81. В борновском приближении найти дифференциальное и полное сечение упругого рассеяния заряженной бесспиновой частицы на равномерно заряженном шаре радиуса  $R$ .
82. Вычислить амплитуду и сечение упругого рассеяния медленной частицы на потенциальной яме  $V(r) = -V_0, r < a, V(r) = 0, r > a$ . Объяснить резонансный характер такого рассеяния.
83. Определить полное сечение упругого рассеяния непроницаемой сферой радиуса  $a$  для медленных частиц, де-бройлевская длина волны которых  $\lambda \gg a$ .
84. Найти дифференциальное сечение упругого рассеяния  $\alpha$ -частицы на  $\alpha$ -частице (в системе центра масс).
85. Найти средние значения и дисперсию электрической и магнитной напряженностей квантованного электромагнитного поля излучения в однофотонном когерентном состоянии  $|\alpha\rangle$ .
86. Доказать, что однофотонные переходы  $S \rightarrow S$  запрещены во всех порядках мультипольности.
87. Установить правила отбора, диаграмму направленности и поляризацию излучения для дипольного излучения.
88. Оценить интенсивность излучения и поглощения фотона атомом в дипольном приближении.
89. В дипольном приближении вычислить время жизни уровней  $2P_{1/2}$  и  $2P_{3/2}$  атома водорода (с учетом тонкой структуры).
90. Нейтральная частица со спином  $s = 1/2$  и магнитным моментом  $\mu\vec{s}$  находится в однородном магнитном поле напряженности  $\mathcal{H}$ . Найти время жизни возбужденного состояния и угловое распределение излучения при его распаде.