

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

физический факультет

Квантовая теория (II поток) январь 2007 г.

<http://hep.itpm.msu.su>

Теоретические вопросы

Математическое введение.

1. Гильбертово пространство. Базис. Унитарные, эрмитовы и проекционные операторы. Их физический смысл.
2. Спектральное разложение эрмитова оператора. Случай непрерывного спектра. Определение функции от оператора. Теоремы о коммутаторах эрмитовых операторов и их собственных векторах.

Теория измерений.

3. Результаты измерения наблюдаемой. Матрица плотности, ее свойства, условие нормировки.
4. Чистое состояние. Матрица плотности чистого состояния. Описание чистого состояния с помощью вектора гильбертова пространства. Принцип суперпозиции, его обоснование.
5. Совместимые и несовместимые наблюдаемые. Полный набор наблюдаемых. Соотношение неопределенностей.

Составные системы.

6. Пространство состояний составной системы. Нахождение матрицы плотности подсистемы. Примеры всех возможных комбинаций чистых и смешанных состояний у системы и подсистем.
7. "Парадоксы" квантовой механики. "Парадокс" ЭПР (Эйнштейна, Подольского, Розена). "Парадокс" GHZ (Greenberger, Horne, Zeilinger).

Динамическая схема квантовой механики.

8. Представления Гайзенберга и Шредингера, связь между ними, формальные решения уравнений Гайзенберга и Шредингера.
9. Стационарные состояния. Симметрии и интегралы движения. Оператор эволюции и его свойства. Выражение для оператора эволюции в случае гамильтониана, зависящего от времени.

Одномерное движение материальной точки.

10. Координатное и импульсное представление. Их связь. Операторы трансляции в координатном и импульсном пространстве.
11. Общие свойства спектра при одномерном движении. Дискретный спектр, непрерывный спектр, кратность вырождения. Осцилляционная теорема. Четный потенциал.
12. Непрерывный спектр и одномерное рассеяние. Рассеяние волновых пакетов.
13. Периодический потенциал, спектр и волновые функции. Периодический потенциал и конечный отрезок периодического потенциала.
14. Квазиклассическое приближение. Условие применимости. Условие сшивания в точках поворота.
15. Правила квантования Бора-Зоммерфельда. Коэффициент туннелирования. Условия применимости.

Трехмерное движение. Теория момента.

16. Координатное и импульсное представление в 3-мерном случае. Поток вероятности, уравнение непрерывности. Вариационный принцип Ритца.
17. Теория момента. Матричные элементы оператора момента. Спин. Орбитальный момент.
18. Сложение моментов. Коэффициенты Клебша-Гордона. Старшие вектора.
19. Сложение орбитального момента и спина. Шаровые спиноры. Частица со спином в центральном поле с ls -взаимодействием.
20. Централно-симметричное поле. Радиальное уравнение Шредингера, граничное условие. Оценка на количество уровней и ее следствия. Падение на центр.
21. Движение частицы со спином в магнитном поле. Однородное поле, состояния с определенной проекцией момента на направление поля.

Стационарная теория возмущений.

22. Стационарная теория возмущений, случай невырожденного уровня. Условия применимости.
23. Стационарная теория возмущений, случай вырожденного уровня. Теория возмущений для близких уровней.

Уравнение Дирака.

24. Уравнение Дирака, симметрии и интегралы движения. Решение свободного уравнения Дирака. Спин и спиральность.
25. Квазирелятивистское разложение. Уравнение Паули.

Многоэлектронный атом.

26. Тожественные частицы. Принцип неразличимости. Бозоны и фермионы. Базис в пространстве состояний тождественных частиц. Принцип Паули.
27. Многоэлектронный атом, приближение центрального поля, интегралы движения, конфигурация, термы.
28. Построение явного вида волновых функций термов, старшие вектора.
29. Диаграммы Юнга. 1-е и 2-е правила Хунда, их объяснение. Тонкая структура термов. 3-е правило Хунда, его доказательство.
30. Метод Хартри. Метод Хартри-Фока. Таблица Менделеева.
31. Типы химической связи. Вид волновой функции для иона водорода. Вид волновой функции для атома водорода. Классификация термов в двухатомной молекуле. Структура термов.

Рассеяние.

32. Упругое потенциальное рассеяние. Постановка задачи. Борновский ряд, условие сходимости, условие применимости 1-го борновского приближения.
33. Парциальное разложение. Условие унитарности для парциальных амплитуд рассеяния, фаза рассеяния. Оптическая теорема, ее физический смысл.
34. Дискретные уровни, виртуальные уровни, метастабильные уровни. Физический смысл метастабильного уровня. Метастабильный уровень и резонанс в рассеянии. Рассеяние при низких энергиях, резонансы в рассеянии при низких энергиях.

Теория переходов.

35. Представление Дирака. Нестационарная теория возмущений. Переходы мгновенные и адиабатические.
36. Переходы под действием периодического возмущения. Золотое правило Ферми.
37. Распад метастабильного уровня и форма линии. Соотношение неопределенностей Бора.

Вторичное квантование.

38. Вторичное квантование. Коммутационные соотношения для операторов рождения-уничтожения. Фоковское пространство. Базис в Фоковском пространстве. Оператор волновой функции. Операторы в представлении вторичного квантования.

Квантование электромагнитного поля. Излучение.

39. Квантование электромагнитного поля. Коммутационные соотношения для операторов рождения-уничтожения фотонов. Энергия и импульс поля.
40. Излучение. Коэффициенты Эйнштейна. Мультипольное разложение.

Задачи

1. Вычислить $f(b + \vec{a} \cdot \vec{\sigma})$.
2. Матрица плотности спина 1/2 имеет вид

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$$

Определить направление поляризации, степень поляризации, вероятность получить значения $\pm 1/2$ при измерении s_x , средние значения величин s_x, s_y, s_z .

3. Пучок частиц со спином 1/2 в состоянии

$$\hat{\rho} = (1/2) + (1/2) \xi \vec{\sigma} \cdot \vec{n}(\theta, \varphi)$$

влетает в прибор Штерна-Герлаха с магнитным полем, ориентированным по оси z . Найти отношение интенсивностей верхнего и нижнего пятна. Как надо направить поле, чтобы это отношение стало максимальным? Чему равно это максимальное отношение?

4. Матрица плотности одномерного гармонического осциллятора имеет вид

$$\hat{\rho} = (1/3) \left(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + |2\rangle\langle 2| \right)$$

Найти среднее значение и дисперсию энергии, среднее значение и дисперсию координаты в этом состоянии.

5. Волновая функция системы двух спинов имеет вид

$$|\psi\rangle = (1/\sqrt{3}) \left(|\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle \right)$$

Найти матрицу плотности первого спина, матрицу плотности второго спина, вероятность того, что $S_z = 0$.

6. Матрица плотности системы двух спинов имеет вид

$$\hat{\rho} = \frac{1}{3} |\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + \frac{1}{3} |\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + \frac{1}{3} |\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow| + \frac{1}{9} |\uparrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + \frac{1}{9} |\downarrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\downarrow|$$

Найти матрицу плотности первого спина, матрицу плотности второго спина, вероятность того, что полный спин равен единице.

7. Гамильтониан системы, состоящей из осциллятора, взаимодействующего с двухуровневой системой, имеет вид:

$$H = \hbar\omega a^+ a + \frac{1}{2}\hbar\omega\sigma_3 + \frac{1}{2}\hbar\gamma(a\sigma_+ + a^+\sigma_-)$$

где $\sigma_{\pm} = \sigma_1 \pm i\sigma_2$, а σ_i — матрицы Паули. Найти уровни энергии.

8. Одномерный гармонический осциллятор. Вычислить

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \hat{x} \hat{p} | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{x} | \alpha \rangle \langle \alpha | \hat{p} | \alpha \rangle \\ \langle \alpha | \hat{p} \hat{x} | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{p} | \alpha \rangle \langle \alpha | \hat{x} | \alpha \rangle \end{aligned}$$

9. Одномерный гармонический осциллятор. Вычислить $\langle \alpha | \hat{x} | \beta \rangle$, $\langle \alpha | \hat{p} | \beta \rangle$. Как убывает ответ с ростом $|\alpha - \beta|$?

10. В координатном и импульсном представлениях найти явный вид волновых функций для когерентного состояния $|\alpha\rangle$.

11. Найти уровни энергии в потенциале

$$V(x) = -V_0\delta(x-a) - V_0\delta(x+a) + U_0\theta(a-|x|)$$

$$(\theta(x > 0) = 1, \theta(x < 0) = 0).$$

12. Найти коэффициенты отражения и прохождения для потенциала

$$V(x) = V_0\delta(x) + U_0\theta(x)$$

$$(\theta(x > 0) = 1, \theta(x < 0) = 0).$$

13. Найти расположение разрешенных зон для одномерной решетки Дирака

$$V(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_0\delta(x-na)$$

14. Найти в квазиклассическом приближении уровни энергии в потенциале $V(x < 0) = \infty$, $V(x > 0) = kx^2/2$. Сравнить с точным ответом.

15. Найти зависимость времени жизни α -активного ядра от энергии вылетающей α -частицы.

16. Найти зависимость тока холодной эмиссии от величины приложенного электрического поля.

17. Найти уровни энергии для сферической оболочки $V(r) = -V_0\delta(r-a)$.

18. Найти уровни энергии в шаровом слое для сферической оболочки $V(r < a) = \infty$, $V(r > c) = \infty$, $V(a < r < b) = A/r^2$, $V(b < r < c) = 0$.

19. Найти среднее значение кинетической энергии, потенциальной энергии, центробежного потенциала и величины $1/r^3$ для атома водорода, который находится в состоянии $|\psi_{nlm}\rangle$.

20. Сложение двух спинов 1/2. Вычислить

$$\begin{aligned} \langle S = 1, S_z = 0 | s_x^{(1)} | S = 1, S_z = 1 \rangle \quad \langle S = 1, S_z = -1 | s_y^{(1)} | S = 0, S_z = 0 \rangle \\ \langle S = 0, S_z = 0 | s_z^{(2)} | S = 1, S_z = 0 \rangle \end{aligned}$$

21. Сложение орбитального момента и спина. Вычислить

$$\begin{aligned} \langle j = l - 1/2, m_j = m + 1/2 | s_x | j = l - 1/2, m_j = m - 1/2 \rangle \\ \langle j = l + 1/2, m_j = m - 1/2 | s_y | j = l - 1/2, m_j = m + 1/2 \rangle \\ \langle j = l + 1/2, m_j = m + 1/2 | l_x | j = l - 1/2, m_j = m - 1/2 \rangle \\ \langle j = l + 1/2, m_j = m + 1/2 | l_z | j = l - 1/2, m_j = m + 1/2 \rangle \end{aligned}$$

22. Частица со спином 1/2 находится в состоянии $|j l s m_j\rangle$. Найдите направление спина $\vec{n}(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi})$ в точке с координатами (r, θ, φ) .

23. Гамильтониан частицы со спином 1/2 имеет вид

$$H = p^2/(2m) + V(r) + U(r) \vec{l} \cdot \vec{s}$$

где $V(r) = -V_0\delta(r-a)$, $U(r < a) = -U_0$, $U(r > a) = 0$. Найти уровни энергии.

24. Гамильтониан системы двух взаимодействующих частиц со спином 1/2, помещенных в постоянное однородное магнитное поле, имеет вид

$$\hat{H} = -2\mu_1 \vec{s}_1 \vec{H} - 2\mu_2 \vec{s}_2 \vec{H} + \alpha \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2$$

Найти уровни энергии системы.

25. Две частицы со спином 1/2 находятся в состоянии

$$|\psi\rangle = \exp(i\varphi_1 s_{1x}) \exp(i\varphi_2 s_{2y}) | \uparrow \uparrow \rangle$$

Найти вероятность того, что полный спин системы равен нулю.

26. Показать, что если A — скалярный оператор, то

$$\langle l' m' | A | l m \rangle = \delta_{l'l} \delta_{m'm} a(l)$$

т.е. его матричные элементы диагональны по l , диагональны по m , не зависят от m .

27. Показать, что если \vec{A} — векторный оператор, то

$$\langle l m | \vec{A} | l m' \rangle = \langle l m | \vec{l} | l m' \rangle \langle l m'' | \vec{A} \cdot \vec{l} | l m'' \rangle / l(l+1)$$

28. Сложение моментов $l_1 = 2$ и $l_2 = 1$. Вычислить

$$|L = 1, M = 1\rangle \quad |L = 1, M = 0\rangle \quad |L = 1, M = -1\rangle$$

29. Вычислить $\langle \psi | y p_z | \psi \rangle$, где $|\psi\rangle = e^{i l x} |l m\rangle$.

30. Спин $1/2$ помещен в магнитное поле

$$\vec{H}(t) = (H_1 \cos \Omega t, H_1 \sin \Omega t, H_0)$$

В момент времени $t = 0$ спин был ориентирован вверх. Найти вероятность переворота спина в момент времени t . Найти частоту электронного парамагнитного резонанса.

31. Одномерный гармонический осциллятор в момент времени $t = 0$ находится в основном состоянии. Затем он на интервале $0 < t < t_0$ подвергается воздействию постоянной силы $f(t) = f_0$. Найти вероятность обнаружить его на n -ом уровне в момент времени t .

32. Одномерный гармонический осциллятор в момент времени $t = 0$ находился в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$. Найти волновую функцию в момент времени t . Вычислить средние значения координаты и импульса и их дисперсию в момент времени t .

33. В начальный момент времени плотность распределения координат свободной нерелятивистской частицы массы m имела гауссову форму. Как будет изменяться со временем ширина пакета ?

34. Гамильтониан системы двух частиц со спином $1/2$ имеет вид

$$\hat{H} = -2\mu_0 (s_z^{(1)} - s_z^{(2)}) H_z$$

Найти вероятность того, что полный спин системы равен нулю в момент времени t , если в момент времени $t = 0$ спин первой частицы был ориентирован вдоль оси x , а второй — против оси x .

35. Заряженный двумерный симметричный линейный гармонический осциллятор помещен в слабое однородное магнитное поле, ориентированное по оси z . В первом порядке теории возмущений найти поправки к энергии второго возбужденного уровня $E^{(0)} = 3\hbar\omega$, вызванные магнитным полем.

36. Двумерный симметричный линейный гармонический осциллятор. В первом порядке теории возмущений найти поправки к энергии первого возбужденного уровня $E^{(0)} = 2\hbar\omega$, вызванные возмущением $H_I = \alpha xy$. Сравнить с точным ответом.

37. Найти диэлектрическую восприимчивость газа, состоящего из атомов водорода, находящихся в основном состоянии. Спином пренебречь.

38. Найти магнитную восприимчивость газа, состоящего из атомов водорода, находящихся в основном состоянии. Спином пренебречь.

39. Найти уровни энергии в атоме водорода с учетом релятивистских поправок.

40. Найти энергию взаимодействия двух атомов водорода на больших расстояниях (силы Ван-дер-Ваальса).

41. Найти расщепление уровня $n = 2$ атома водорода в слабом магнитном поле с учетом тонкой структуры.

42. Найти расщепление уровня $n = 2$ атома водорода в среднем магнитном поле с учетом тонкой структуры.

43. Найти расщепление уровня $n = 2$ атома водорода в сильном магнитном поле с учетом тонкой структуры.

44. Найти расщепление уровня $n = 2$ атома водорода в слабом электрическом поле с учетом тонкой структуры.

45. Найти расщепление уровня $n = 2$ атома водорода в среднем электрическом поле с учетом тонкой структуры.

46. Найти расщепление уровня $n = 2$ атома водорода в сильном электрическом поле с учетом тонкой структуры.

47. Найти вариационным методом энергию основного состояния атома гелия. Пробную функцию выбрать в виде произведения кулоновских функций с $n = 1, l = 0, m = 0$ и с эффективным зарядом $Z_{eff} = \alpha$, играющим роль вариационного параметра.

48. Разложить электронную конфигурацию $(np)^3$ на термы с помощью диаграмм Юнга.

49. Разложить электронную конфигурацию $(nd)^2$ на термы с помощью диаграмм Юнга.

50. Найти явный вид волновых функций термов в конфигурации $(np)^3$.

51. Найти явный вид волновых функций термов в конфигурации $(np)^4$.

52. Пользуясь правилами Хунда, найти квантовые числа S, L, J состояния с наименьшей энергией для конфигурации nl^k .

53. Найти поправки к уровням энергии многоэлектронного атома в слабом однородном магнитном поле.

54. Найти поправки к уровням энергии многоэлектронного атома в сильном однородном магнитном поле.

55. Найти поправки к уровням энергии многоэлектронного атома в слабом однородном электрическом поле.

56. Найти дифференциальное сечение упругого рассеяния μ -мезона на неподвижном атоме водорода. Атом находится в состоянии $1s$.

57. Определить полное сечение упругого рассеяния непроницаемой сферой радиуса a для быстрых частиц, де-бройлевская длина волны которых $\lambda \ll a$.

58. Определить полное сечение упругого рассеяния непроницаемой сферой радиуса a для медленных частиц, де-бройлевская длина волны которых $\lambda \gg a$.

59. Найти энергию и время жизни метастабильных s -уровней в потенциале $V(r) = V_0 \delta(r - a)$.

60. Найти парциальное сечение рассеяния s -волны на потенциале $V(r) = V_0 \delta(r - a)$. Указать положение резонансов.

61. Вычислить сечение упругого рассеяния медленной частицы на потенциальной яме $V(r < a) = -V_0, V(r > a) = 0$. Указать условие резонанса.

62. В приближении эйконала найти фазы рассеяния на потенциале A/r^2 . Сравнить с точным ответом.
63. Найти вероятность того, что электрон в атоме трития H^3 , находящийся в основном состоянии, перейдет в $1s$ состояние иона He^{3+} при β -распаде одного из нейтронов ядра.
64. Найти дифференциальное сечение неупругого рассеяния частицы на сферическом гармоническом осцилляторе. Осциллятор переходит из основного в первое возбужденное состояние. Потенциал взаимодействия между частицей и осциллятором $W(\vec{x}, \vec{y}) = W_0 \delta(\vec{x} - \vec{y})$.
65. Найти дифференциальное сечение неупругого рассеяния μ -мезона на неподвижном атоме водорода. Атом переходит из состояния $1s$ в состояние $2s$.
66. В представлении вторичного квантования найти матричные элементы одночастичного оператора

$$V = \int dx \psi^\dagger(x) V(x) \psi(x)$$

между двухчастичными состояниями $\langle kl|V|mn \rangle$ для бозонов и фермионов. Рассмотреть случаи $k = m, l = n$ и $k = m = l = n$.

67. В представлении вторичного квантования найти матричные элементы двухчастичного оператора

$$W = \iint dx dy \psi^\dagger(x) \psi^\dagger(y) W(x, y) \psi(y) \psi(x)$$

между двухчастичными состояниями $\langle kl|W|mn \rangle$ для бозонов и фермионов. Рассмотреть случаи $k = m, l = n$ и $k = m = l = n$.

68. Найти средние значения и дисперсию напряженностей электрического и магнитного полей в одномодовом когерентном состоянии $|\alpha_{\vec{k}, p}\rangle$.
69. Найти средние значения и дисперсию напряженностей электрического и магнитного полей в двухмодовом когерентном состоянии $|\alpha_{\vec{k}_1, p_1}, \alpha_{\vec{k}_2, p_2}\rangle$, а также в состоянии $|\psi\rangle = |\alpha_{\vec{k}_1, p_1}\rangle/\sqrt{2} + |\alpha_{\vec{k}_2, p_2}\rangle/\sqrt{2}$.
70. Вывести формулу для распределения интенсивности излучения по углам и поляризациям в электрическом дипольном приближении.
71. Вывести формулу для распределения интенсивности излучения по углам и поляризациям в электрическом квадрупольном и магнитном дипольном приближении.
72. Указать, между какими уровнями заряженного сферического гармонического осциллятора возможны электромагнитные переходы в дипольном приближении. Вычислить время жизни первого возбужденного уровня осциллятора в этом приближении. Найти распределения интенсивности излучения по углам и поляризациям.
73. В дипольном приближении вычислить время жизни уровней $2p_{1/2}$ и $2p_{3/2}$ атома водорода (с учетом тонкой структуры).
74. Атом водорода помещен в слабое однородное магнитное поле. Описать излучение при переходе $3d \rightarrow 2p$ (тонкой структурой пренебречь). Указать количество линий в спектре и описать распределение их интенсивности по углам и поляризациям.
75. Установить правила отбора для E2- и M1- электромагнитных переходов в атоме.
76. Частица со спином $1/2$ находится в однородном магнитном поле напряженности \vec{H} . Найти время жизни возбужденного состояния и распределение интенсивности излучения по углам и поляризациям.
77. Найти время жизни и распределение интенсивности излучения по углам и поляризациям при переходе между уровнями сверхтонкой структура атома водорода.
78. Доказать, что однофотонные переходы $S \rightarrow S$ запрещены во всех порядках мультипольности.
79. Найти зависимость энергии магнона от волнового числа в одномерной спиновой цепочке с гамильтонианом

$$H = -\alpha \sum_n \vec{s}_n \cdot \vec{s}_{n+1} - \beta \sum_n \vec{s}_n \cdot \vec{s}_{n+2} - 2\mu_0 \vec{H} \cdot \sum_n \vec{s}_n$$

80. Найти парамагнитную восприимчивость газа, состоящего из фермионов со спином $1/2$, при нулевой температуре.
81. Найти флуктуации плотности бозонного газа при нулевой температуре.
82. Найти время жизни дискретного уровня в потенциале $-V_0 \delta(x)$, находящегося под воздействием возмущения $H_I = V_1 \cos(\Omega t)$.
83. Найти время жизни дискретного уровня в потенциале $-V_0 \delta(x)$, находящегося под воздействием плоской волны $H_I = V_1 \cos(\Omega t - Kx)$.