МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра квантовой теории
и физики высоких энергий.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРАММА-МИНИМУМ К ЗАЧЕТУ

по курсу "ЭЛЕКТРОДИНАМИКА"для студентов 3-его курса
физического факультета МГУ, 2014-2015 учебный год

Авторы-составители:

В. А. СОКОЛОВ
А. В. ТОЛОКОННИКОВ

МОСКВА- 2014

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРАММА-МИНИМУМ К ЗАЧЕТУ

"Часть 1. Электродинамика полей и зарядов в вакууме.

Специальная теория относительности."

1. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме. Сила Лоренца.
2. Уравнения Максвелла в интегральной форме.
3. Закон сохранения заряда и закон сохранения энергии в электродинамике (в дифференциальной форме).
4. Связь полей и потенциалов. Калибровка Лоренца и уравнения для потенциалов в этой калибровке.
5. Лапласиан от скалярной функции в декартовых прямоугольных, цилиндрических и сферических координатах.
6. Решение уравнений для потенциалов в виде запаздывающих потенциалов.
7. Электрический дипольный момент. Потенциал и напряженность поля электрического диполя в электростатике. Энергия диполя во внешнем поле.
8. Магнитный дипольный момент. Векторный потенциал и напряженность поля магнитного диполя в статике.
9. Свойства плоских электромагнитных волн. Связь векторов поля $\vec{H}$ и $\vec{E}$, волнового вектора $\vec{k}$ и частоты ω.
10. Потенциалы, напряженности полей, интенсивность и угловое распределение электрического дипольного излучения.
11. Сила радиационного трения в нерелятивистском приближении.
12. Преобразования Лоренца для координат-времени в 3-мерном виде.
13. Релятивистский закон сложения скоростей.
14. Преобразования Лоренца для четырехмерных векторов; примеры четырехмерных векторов, используемых в электродинамике; их инварианты.
15. Законы преобразования напряженностей электромагнитного поля. Тензор электромагнитного поля и его инварианты.
16. Связь энергии, импульса, массы и скорости релятивистской частицы.
17. Уравнения движения релятивистской заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.
18. Выражения для плотности энергии, плотности импульса и потока энергии электромагнитного поля.
19. Функция Лагранжа релятивистской заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. Уравнения движения в форме Лагранжа.

ПРИМЕЧАНИЯ:

1. Минимальным требованием для зачета является знание всех соответствующих формул без вывода.

2. Знание перечисленных вопросов является необходимым, но не достаточным для зачета. Достаточным является умение применить данные формулы к решению задач.

1. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме. Сила Лоренца

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\,\vec{j}(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t},\\
&\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi\rho(\vec{r},t),\\
&\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\,\frac{\partial \vec{H}}{\partial t},\\
&\operatorname{div}\vec{H} = 0,
\end{aligned}$$

$$\vec{H} = \vec{H}(\vec{r},t), \quad \vec{E} = \vec{E}(\vec{r},t).$$

Сила Лоренца

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{q}{c}\left[\,\vec{v}(t),\ \vec{H}(\vec{r},t)\,\right],$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор частицы в текущий момент времени, $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}$ — скорость частицы.

Плотность силы Лоренца

$$\vec{f}(\vec{r},t) = \lim_{\Delta V\to 0}\left(\frac{\vec{F}}{\Delta V}\right) = \rho\vec{E}(\vec{r},t) + \frac{1}{c}\left[\vec{j},\vec{H}(\vec{r},t)\,\right],$$

где $\rho(\vec{r},t)$ и $\vec{j}(\vec{r},t)$ — плотность заряда и плотность тока в точке с радиус-вектором $\vec{r}$ в момент времени t.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- Объясните несоответствие числа уравнений и числа неизвестных в системе уравнений Максвелла.
- * Докажите единственность решений системы уравнений Максвелла в вакууме при заданных источниках.
- Используя цилиндрические координаты, запишите компоненты силы Лоренца, действующей на заряд, движущийся в однородном магнитном поле $\vec{H}$, направленном по оси z.
- * Укажите, как бы изменилось выражение для силы Лоренца, действующей со стороны электромагнитного поля на гипотетическую частицу, имеющую электрический заряд q и магнитный заряд g.

2. Уравнения Максвелла в интегральной форме

$$
\begin{aligned}
&\oint_L (\vec{H}, \vec{dl}) = \frac{4\pi}{c}\, I + \frac{1}{c}\int_S \frac{\partial}{\partial t}\,(\vec{E}, \vec{dS}),\\
&\oint_S (\vec{E}, \vec{dS}) = 4\pi\, Q,\\
&\oint_L (\vec{E}, \vec{dl}) = -\frac{1}{c}\int_S \frac{\partial}{\partial t}\,(\vec{H}, \vec{dS}),\\
&\oint_S (\vec{H}, \vec{dS}) = 0,
\end{aligned}
$$

где Q — полный заряд, заключенный внутри объема V, а I — ток, протекающий через поверхность S.

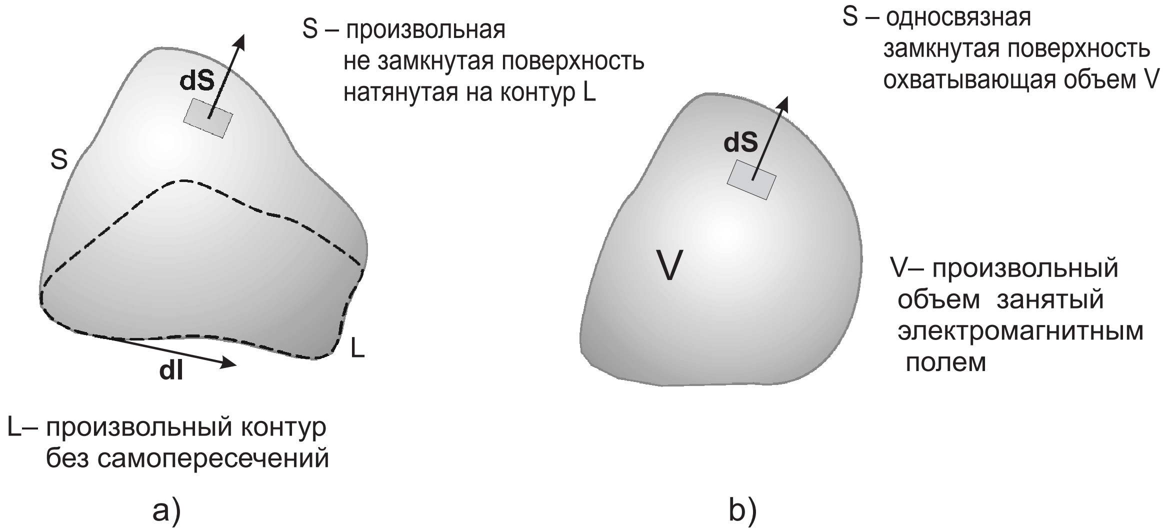
$$
I = \int_S (\vec{j}, \vec{dS}), \quad Q = \int_V \rho\, dV,
$$

Напряженности электрического и магнитного поля в общем случае зависят от координат точки наблюдения и от времени:

$$
\vec{H} = \vec{H}(\vec{r}, t), \quad \vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t).
$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- Как изменятся интегральные уравнения Максвелла в случае, если форма контура L и поверхности S будет изменяться с течением времени.
- Верно ли, что для электростатического поля с заданным распределением зарядов уравнения Максвелла в интегральной форме позволяют определить напряженность поля $\vec{E}$ с точностью до произвольного вектора, перпендикулярного к $\vec{dS}$?
- Проверьте согласованность уравнений Максвелла в интегральной форме с законом сохранения заряда.



3. Закон сохранения заряда и закон сохранения энергии в электродинамике (в дифференциальной форме)

$$\frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r},t) = 0,$$

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\sigma} + \Big(\vec{j}, \vec{E}(\vec{r},t)\Big) = 0,$$

$\mathcal{W} = \left[\,\frac{\text{эгр}}{\text{см}^3}\,\right] = \dfrac{\vec{E}^2 + \vec{H}^2}{8\pi}$ – плотность энергии электромагнитного поля,

$\vec{\sigma} = \left[\,\frac{\text{эгр}}{\text{см}^2\ \text{с}}\,\right] = \dfrac{c}{4\pi}[\vec{E},\vec{H}]$– плотность потока энергии электромагнитного поля.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- Проверьте выполнение закона сохранения заряда для точечного заряда q, движущегося по заданному закону $\vec{r} = \vec{r}_0(t)$ со скоростью $\vec{v}_0 = d\vec{r}_0/\text{dt}$.
- Укажите физический смысл каждого из слагаемых в законе сохранения энергии в дифференциальной форме.
- Проверьте выполнение закона сохранения энергии в дифференциальной форме для плоской электромагнитной волны в вакууме.

4. Связь полей и потенциалов. Калибровка Лоренца и уравнения для потенциалов в этой калибровке.

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r},t),$$
$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t}.$$

Калибровочные преобразования

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f(\vec{r},t), \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f(\vec{r},t)}{\partial t}.$$

Калибровка Лоренца

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0.$$

Уравнения для потенциалов в калибровке Лоренца

$$\Box \vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t), \quad \Box \varphi(\vec{r},t) = -4\pi\rho(\vec{r},t),$$

где для сокращения записи использовано обозначение для оператора д'Аламбера (Jean d'Alambert):

$$\Box = \triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- Используя векторное обозначение, запишите выражение скалярного потенциала $\varphi(\vec{r})$ для однородного электростатического поля с напряженностью $\vec{E}_0$. Запишите выражение векторного потенциала $\vec{A}(\vec{r})$ для однородного магнитного поля с напряженностью $\vec{H}_0$.

- Допускает ли калибровка Лоренца выполнение дополнительных калибровочных преобразований? Если да, то какому уравнению должна удовлетворять калибровочная функция таких преобразований?

- Прямым вычислением проверьте, что напряженности электрического и магнитного полей не изменяются при калибровочных преобразованиях. Также, проверьте согласованность уравнений для потенциалов в калибровке Лоренца с законом сохранения заряда.

5. Лапласиан от скалярной функции в декартовых прямоугольных, цилиндрических и сферических координатах.

$$\Delta\psi(\vec{r}) = \mathrm{div}\ \mathrm{grad}\,\psi(\vec{r})$$

Декартовы прямоугольные координаты

$$\Delta\psi(x,\ y,\ z) = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}.$$

Цилиндрические координаты

$$x = r\ \cos\varphi, \quad y = r\ \sin\varphi, \quad z = z,$$

$$\Delta\psi(r,\ \varphi, z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}.$$

Сферические координаты

$$x = r\ \sin\theta\ \cos\varphi, \quad y = r\ \sin\theta\ \sin\varphi, \quad z = r\ \cos\theta,$$

$$\Delta\psi(r,\ \theta,\ \varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\ \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- Вычислите в сферической системе координат $\Delta\Big\{\cos\theta/r^2\Big\}$ во всех точках за исключением начала координат.

- Вычислите в цилиндрической системе координат

$$\Delta\Big\{A\ln(r) + \frac{B\cos(2\varphi)}{r^2}\Big\}$$

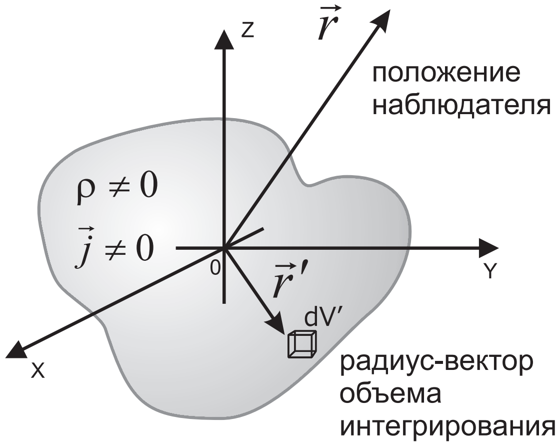
во всех точках за исключением начала координат. A, B – постоянные.

- Вычислите $\Delta\Big(\vec{\omega},\vec{r}\Big)$, где $\vec{\omega}$ – произвольный постоянный вектор, а $\vec{r}$– радиус-вектор.

6. Решение уравнений для потенциалов в виде запаздывающих потенциалов.

$$\square\ \varphi(\vec{r},t) = -4\pi\rho(\vec{r},t), \qquad \varphi(\vec{r},t) = \int\limits_V \frac{\rho\left(\vec{r}\,',\ t - \dfrac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} dV',$$

$$\square\ \vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r},t), \qquad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{c}\int\limits_V \frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,',\ t - \dfrac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} dV'.$$



КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- Найдите потенциал электростатического поля, создаваемого бесконечной тонкой нитью, расположенной вдоль оси Z и равномерно заряженной по длине с линейной плотностью заряда κ.

- Используя решение для запаздывающих потенциалов, покажите, что векторный потенциал магнитостатического поля удовлетворяет уравнению $\mathrm{div}\vec{A}(\vec{r}) = 0$.

- *Покажите что для частицы с зарядом q, движущейся равномерно и прямолинейно по закону $x(t) = Vt$, $y(t) = 0$, $z(t) = 0$, потенциалы электромагнитного поля можно представить в виде:

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{q}{\sqrt{\left(x - Vt\right)^2 + \left(1 - V^2/c^2\right)\left(y^2 + z^2\right)}}, \quad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\vec{V}}{c}\,\varphi(\vec{r},t).$$

7. Электрический дипольный момент. Потенциал и напряженность поля электрического диполя в электростатике. Энергия диполя во внешнем поле.

Электрический дипольный момент электростатической системы с плотностью заряда $\rho(\vec{r}\,')$ в общем случае определяется выражением

$$\vec{d} = \int\limits_V \rho(\vec{r}\,')\, \vec{r}\,' dV'.$$

Для системы, состоящей из N точечных частиц, электрический дипольный момент можно вычислить проще: $\vec{d} = \sum\limits_{k=1}^{N} q_k \vec{r}_k$, где $\vec{r}_k\,'$ – радиус-вектор заряда q_k. Потенциал и напряженность электрического поля диполя в электростатике:

$$\varphi(\vec{r}\,) = \frac{(\vec{d}, \vec{r}\,)}{r^3}, \quad \vec{E}(\vec{r}\,) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}\,) = \frac{3(\vec{d}, \vec{r}\,)\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{d}}{r^3}.$$

Энергия взаимодействия диполя $\vec{d}$ с внешнем электрическом поле $\vec{E}_{ext}$:

$$\mathcal{E} = -\left(\vec{d}, \vec{E}_{ext}\,(\vec{r})\right),$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки, в которой находится диполь.
Сила, действующая на диполь $\vec{d}$ со стороны внешнего электрического поля $\vec{E}_{ext}$:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\mathcal{E} = \left(\vec{d}, \vec{\nabla}\right)\, \vec{E}_{ext}\,(\vec{r}).$$

Момент силы, действующий на диполь $\vec{d}$ со стороны внешнего электростатического поля $\vec{E}_{ext}$:

$$\vec{M} = \left[\vec{d}, \vec{E}_{ext}\,(\vec{r}\,)\right].$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- Докажите, что электрический дипольный момент электрически нейтральной системы не зависит от выбора положения начала системы координат.

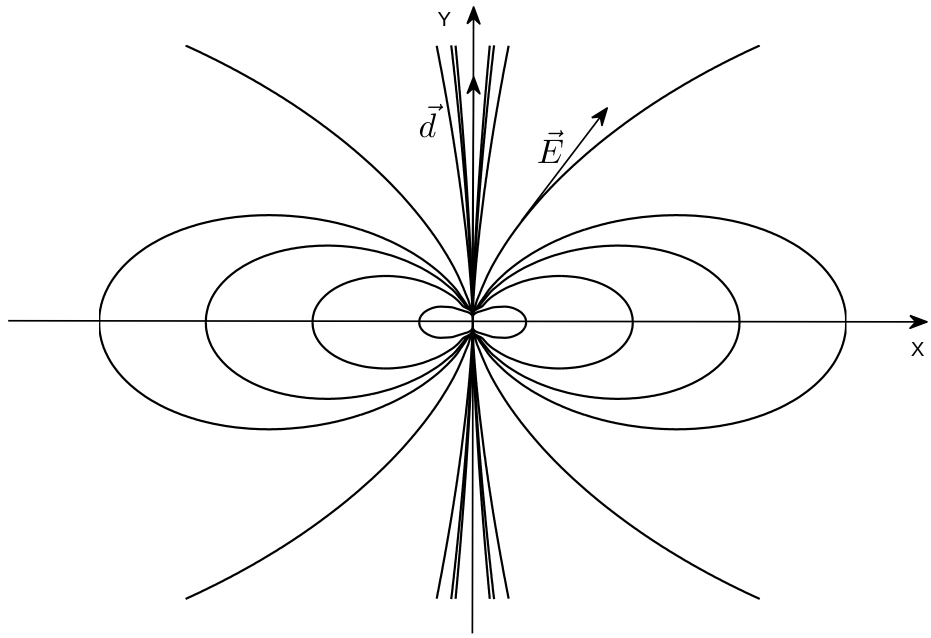


Рис. 1. Силовые линии напряженности электрического поля диполя

- Вычислите напряженность электрического поля диполя $\vec{E}_{||}$ в точке на оси диполя на расстоянии R от диполя. Вычислите напряженность электрического поля диполя $\vec{E}_{\perp}$ в точке, расположенной перпендикулярно оси диполя на расстоянии R от него. Найдите отношение $|\vec{E}_{||}|/|\vec{E}_{\perp}|$.

- Электрические диполи $\vec{d}_1$ и $\vec{d}_2$ ориентированы взаимно перпендикулярно и лежат в одной плоскости с радиус-вектором $\vec{r}$, проведенным от первого диполя ко второму. Найдите силу, действующую на диполь $\vec{d}_2$ со стороны диполя $\vec{d}_1$.

8. Магнитный дипольный момент. Векторный потенциал и напряженность поля магнитного диполя в статике.

Магнитный дипольный момент магнитостатической системы с плотностью тока $\vec{j}$ определяется выражением

$$\vec{m} = \frac{1}{2c}\int\limits_V [\vec{r}\,', \vec{j}(\vec{r}\,')]dV'.$$

Векторный потенциал и напряженность поля магнитного диполя в статике:

$$\vec{A}(\vec{r}\,) = \frac{[\vec{m},\ \vec{r}\,]}{r^3}, \quad \vec{H}(\vec{r}\,) = \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r}\,) = \frac{3(\vec{m},\vec{r}\,)\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}.$$

Энергия взаимодействия диполя $\vec{m}$ с внешнем магнитным полем $\vec{H}_{ext}$:

$$\mathcal{E} = \left(\vec{m}, \vec{H}_{ext}\,(\vec{r})\right),$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки, соответствующей положению диполя.

Момент силы, действующий на диполь $\vec{m}$ во внешнем магнитном поле $\vec{H}_{ext}$:

$$\vec{M} = \left[\vec{m}, \vec{H}_{ext}\,(\vec{r}\,)\right].$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- Используя выражение для векторного потенциала магнитного $\vec{A}(\vec{r})$, получите напряженность поля магнитного диполя $\vec{H}(\vec{r})$.
- Магнитный диполь $\vec{m}$ ориентирован вдоль оси Z. Запишите выражение для напряженности магнитного поля диполя в сферической системе координат $\vec{H} = H_r\vec{e}_r + H_\theta\vec{e}_\theta$.
- Покажите, что для тонкого, плоского контура (без самопересечений) с током J магнитный момент может быть вычислен с помощью выражения $\vec{m} = JS\vec{N}/c$, где S – площадь контура, $\vec{N}$ – вектор нормали к поверхности контура.

9. Свойства плоских электромагнитных волн. Связь векторов поля $\vec{H}$ и $\vec{E}$, волнового вектора $\vec{k}$ и частоты ω.

Решение для плоских монохроматических электромагнитных волн в вакууме имеет вид:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \exp\{-i[\omega t - (\vec{k},\vec{r})]\}, \qquad \vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_0 \exp\{-i[\omega t - (\vec{k},\vec{r})]\},$$

где $\vec{E}_0,\ \vec{H}_0$ — в общем случае комплексные векторы амплитуды волны, ω и $\vec{k}$ — частота волны и волновой вектор.

Из уравнений Максвелла (в вакууме, в отсутствие источников $\rho \equiv 0$, $\vec{j} \equiv 0$) следует, что напряженности электрического и магнитного полей в волне связаны между собой соотношениями:

$$[\vec{k}, \vec{H}] = -\frac{\omega}{c}\vec{E}, \qquad [\vec{k}, \vec{E}] = \frac{\omega}{c}\vec{H},$$

$$(\vec{k}, \vec{E}) = 0, \qquad (\vec{k}, \vec{H}) = 0,$$

из которых можно установить важные свойства плоской электромагнитной волны в вакууме:

1. Закон дисперсии плоской электромагнитной волны в вакууме:

$$\vec{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

2. Векторы $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{k}$ – образуют правую тройку векторов и связаны между собой следующими соотношениями:

$$\vec{E} = -[\vec{n}, \vec{H}], \qquad \vec{H} = [\vec{n}, \vec{E}].$$

   где $\vec{n}$ – единичный вектор, направленный вдоль волнового вектора $\vec{k}$:

$$\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k} = \frac{c}{\omega}\vec{k}.$$

3. Модули напряженностей электрического и магнитного полей волны, распространяющейся в вакууме, в каждой выделенной точке пространства и в любой момент времени равны друг другу:

$$\left|\vec{E}(\vec{r}, t)\right| = \left|\vec{H}(\vec{r}, t)\right|.$$

4. Фронт волны – поверхность равной фазы $\varphi = const = [\omega t - (\vec{k}, \vec{r}\,)]$ в каждый выбранный момент времени t описывается плоскостью, перпендикулярной к волновому вектору $\vec{k}$. Фронт волны перемещается в направлении волнового вектора со скоростью $\mathrm{v}_f = c$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- Получите выражение закона дисперсии для плоской электромагнитной волны в вакууме.
- Плоская электромагнитная волна с частотой ω распространяется в вакууме в положительном направлении оси Z. Запишите выражения для напряженности электрического $\vec{E}(\vec{r},t)$ и магнитного $\vec{H}(\vec{r},t)$ поля волны, в случае круговой поляризации.
- Верно ли, что для плоской электромагнитной волны векторный потенциал $\vec{A}$ всегда перпендикулярен волновому вектору $\vec{k}$?

10. Потенциалы, напряженности полей, интенсивность и угловое распределение электрического дипольного излучения.

Излучение — часть электромагнитного поля, создаваемого локальной системой системой зарядов и токов, способная переносить энергию от источника на пространственную бесконечность.

Потенциалы излучения в электрическом дипольном приближении определяются первыми производными электрического дипольного момента системы по запаздывающему времени $\tau = t - r/c$, где $\vec{r}$ — радиус-вектор, направленный от системы к точке наблюдения, t — момент времени, фиксируемый по часам удаленного наблюдателя

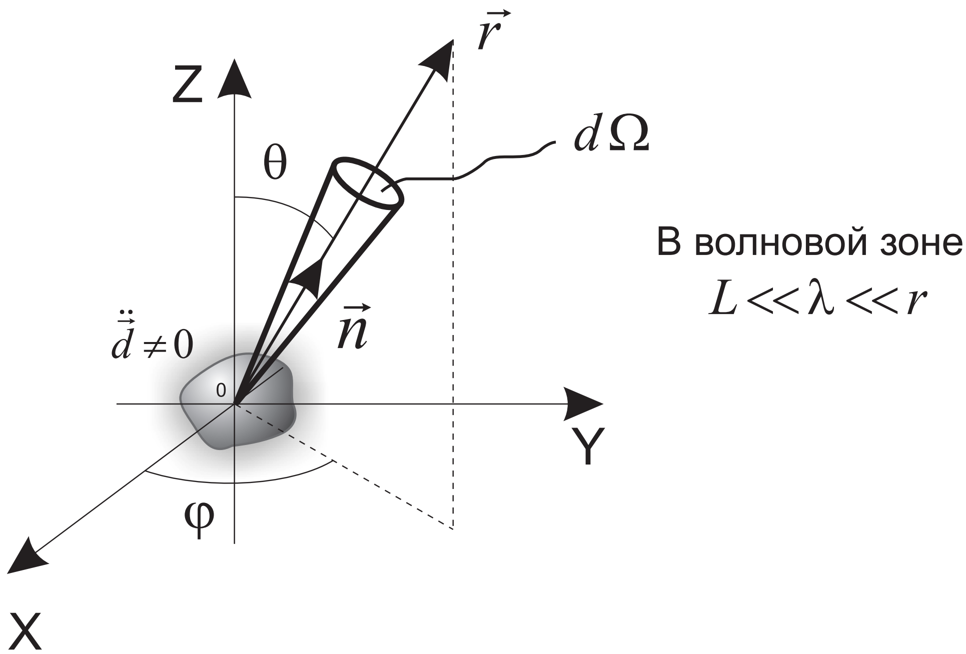
$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{\big(\vec{n}, \dot{\vec{d}}(\tau)\big)}{cr}, \qquad \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\dot{\vec{d}}(\tau)}{cr}.$$

Для сокращения записи принято использовать следующие обозначения $\vec{n} = \vec{r}/r$ — единичный вектор, направленный в сторону наблюдателя, $\vec{d}$ — вектор электрического дипольного момента системы

$$\vec{d}(\tau) = \int\limits_V \rho(\vec{r}\,', \tau)\, \vec{r}\,' dV', \qquad \dot{\vec{d}}(\tau) = \frac{\partial \vec{d}}{\partial \tau}.$$

Напряженности электрического и магнитного полей (в волновой зоне $L \ll \lambda \ll r$) имеют вид:

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{[\ddot{\vec{d}}(\tau), \vec{n}]}{c^2 r}, \qquad \vec{E}(\vec{r},t) = -[\vec{n}, \vec{H}] = -\frac{\big[\vec{n}, [\ddot{\vec{d}}(\tau), \vec{n}]\,\big]}{c^2 r}.$$



Угловое распределение интенсивности излучения — энергия, излучаемая системой в единицу времени в элемент телесного угла $d\Omega = \sin\theta \; d\theta \; d\varphi$ в заданном направлении:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \left[\frac{\text{эрг}}{\text{сек стр}} \right] = \frac{[\ddot{\vec{d}}(\tau), \vec{n}]^2}{4\pi c^3}.$$

Полная интенсивность излучения — энергия излучаемая системой в единицу времени по всем направлениям:

$$I = \left[\frac{\text{эрг}}{\text{сек}} \right] = \frac{2\ddot{\vec{d}}^{\,2}(\tau)}{3c^3}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- Укажите причины, по которым разложение в мультипольной ряд в задаче об излучении начинается с электрического дипольного приближения, а не с монопольного приближения, несмотря на то, что потенциал монополя убывает $\sim 1/r$.

- Сформулируйте условия отсутствия излучения в электрическом дипольном приближении для системы, состоящей из частиц с одинаковым отношением заряда к массе q/m.

- Используя выражения для φ и $\vec{A}$, получите напряженность электрического и магнитного поля для электрического дипольного излучения в волновой зоне.

11. Сила радиационного трения в нерелятивистском приближении.

Изменение кинетической энергии системы заряженных частиц происходит как за счет совершения работы A внешними силами $\vec{F}_{ext}$, так и за счет потери энергии на излучение. Такую потерю энергии можно эффективно представить как торможение некоторой диссипативной силой — силой радиационного трения $\vec{F}_{rad}$, возникающей как результат "отдачи"от излучения:

$$\frac{d\mathcal{E}_{kin}}{dt} = \frac{dA}{dt} - I = (\vec{F}_{ext}, \vec{v}) + (\vec{F}_{rad}, \vec{v}).$$

Для периодического движения нерелятивистской частицы сила радиационного трения может быть получена из условия, что работа этой силы за период движения частицы T равна потери энергии на излучение за этот же промежуток времени $[0,\ T]$:

$$\int\limits_0^T (\vec{F}_{rad}, \vec{v}) = -\int\limits_0^T I(t)dt = -\frac{2q^2}{3c^3}\int\limits_0^T \ddot{\vec{d}}(t)^2 dt,$$

В этом случае, сила радиационного трения описывается формулой Лоренца (Lorentz 1892):

$$\vec{F}_{rad} = \frac{2q^2\,\dddot{\vec{r}}}{3c^3}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- На примере движения заряженного гармонического осциллятора сформулируйте правило понижения порядка производной в формуле Лоренца для силы радиационного трения.

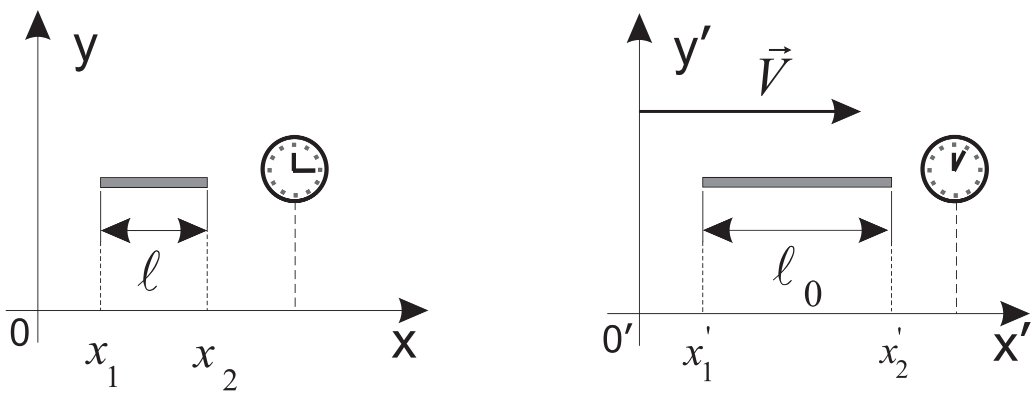
- Заряд q равномерно вращается с угловой скоростью ω по окружности радиуса R. Вычислите момент силы радиационного трения, действующей на заряд.

- Покажите, что для частицы с зарядом q и массой m, движущейся под действием внешней силы $\vec{F}(t)$, формула Лоренца для силы радиационного трения приводит к нарушению принципа причинности. Значение ускорения в момент времени t определяется влиянием внешней силы, вычисленной в моменты времени, бесконечно удаленные в будущее:

$$\vec{a}(t) = \int_t^\infty \frac{\vec{F}(t')}{m\gamma}\ \exp\left(\frac{t-t'}{\gamma}\right) dt', \quad \gamma = \frac{2q^2}{3mc^3},$$

при условии $\vec{a}(t) \to 0$ для $t \to \infty$.

12. Преобразования Лоренца для координат-времени в 3-мерном виде.



Преобразования Лоренца

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \dfrac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \text{где} \quad \beta = V/c.$$

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \dfrac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \text{где} \quad \beta = V/c.$$

Изменение интервала времени и "сокращение"длины отрезка

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad l = l_0\sqrt{1-\beta^2}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- Прямым вычислением покажите инвариантность интервала относительно преобразований Лоренца:

$$ds^2 = (c\,dt)^2 - d\vec{r}^{\,2} = (c\,dt')^2 - d\vec{r}^{\,\prime 2} = ds'^{\,2}.$$

- Координатами светового конуса (light cone) называют $x_+ = x + ct$ и $x_- = x - ct$. Запишите преобразования Лоренца и квадрат интервала ds^2 в терминах этих координат.

- Верно ли, что два не одновременных события, происходящие в разных точках пространства, ни в одной инерциальной системе отсчета не будут происходить одновременно и в одной и той же точке?

13. Релятивистский закон сложения скоростей.

Релятивистский закон сложения скоростей позволяет связать компоненты вектора скорости, измеренной наблюдателями, находящимися в разных инерциальных системах отсчета.

Наблюдатель в лабораторной системе отсчета определяет компоненты скорости некоторой движущейся точки с использованием координат и часов, покоящихся в его системе отсчета

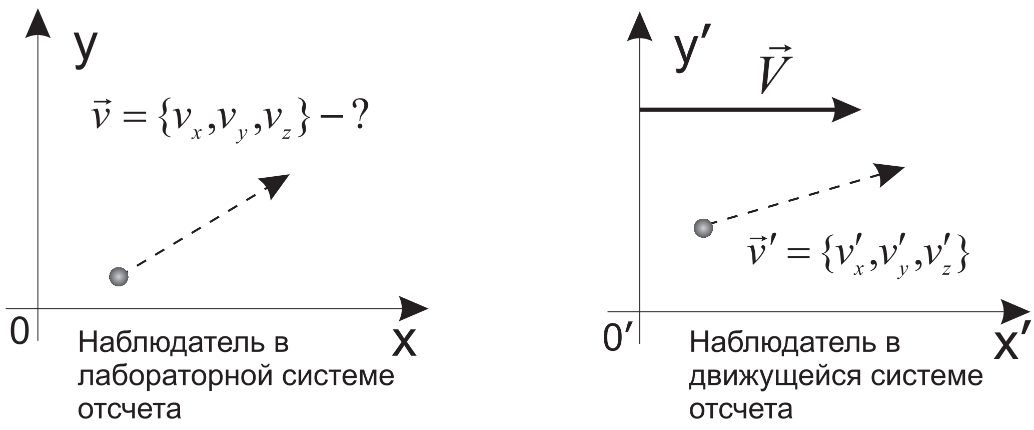
$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Второй наблюдатель в системе отсчета, движущейся относительно лабораторной со скоростью V вдоль положительного направления оси x, проводит аналогичное измерение для скорости точки, но с использованием своей системы координат и часов, покоящихся относительно него:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'}.$$

Релятивистский закон сложения скоростей позволяет связать результаты измерений обоих наблюдателей между собой:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \dfrac{v'_x V}{c^2}}, \qquad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \dfrac{v'_x V}{c^2}}, \qquad v_z = \frac{v'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \dfrac{v'_x V}{c^2}}, \quad \text{где} \quad \beta = V/c.$$



Для получения обратного преобразования, достаточно в правой части всех выражений заменить компоненты вектора скорости со штрихом на компоненты без штриха, и наоборот, у проекций скорости в левой части равенств, нужно поставить штрих. Также, следует изменить знак скорости движения системы отсчета на противоположный $V \to -V$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- Зеркало движется параллельно своей плоскости. Доказать, что угол падения фотона равен углу отражения.

- Скорость частицы в лабораторной системе отсчета равна $\vec{v}$. Скорость этой же частицы, измеренная наблюдателем в системе отсчета, движущейся инерциально относительно лабораторной (со скоростью $\vec{V}$ в положительном направлении оси X), равна $\vec{v}\,'$. Используя релятивистский закон сложения скоростей, покажите, что квадраты скорости частицы, измеренные лабораторным и подвижным наблюдателями, связаны между собой соотношением:

$$v'^2 - c^2 = -\frac{\left(1 - V^2/c^2\right)\left(1 - v^2/c^2\right)}{\left(1 - V v_x/c^2\right)} \; c^2.$$

- На основании предыдущего вычисления обоснуйте утверждение: в любой инерциальной системе отсчета скорость досветовой частицы не превысит скорости света, а скорость гипотетической, сверхсветовой частицы всегда останется больше скорости света.

- Проверьте соответствие общего выражения релятивистского закона сложения скоростей

$$\vec{v} = \frac{\Big[\vec{V}, [\vec{v}\,', \vec{V}]\Big]\sqrt{1-\beta^2} + \vec{V}\Big(V^2 + (\vec{v}\,', \vec{V})\Big)}{V^2 + \beta^2(\vec{v}\,', \vec{V})}, \quad \beta = \frac{V}{c}$$

частному случаю, когда скорость относительного движения системы отсчета ориентирована в положительном направлении оси X.

- Наблюдатель в лабораторной системе отсчета следит за частицей, движущейся относительно него со скоростью $\vec{v}$, образующей угол α с положительным направлением оси X. Второй наблюдатель в инерциальной системе отсчета, движущейся относительно лабораторной в положительном направлении оси X со скоростью $\vec{V}$, следит за движением той же частицы. Покажите, что в случае, если угол α удовлетворяет условию:

$$\cos\alpha = \frac{V}{v\big(1-\sqrt{1-V^2/c^2}\big)} \quad \text{при} \quad V \ll v,$$

направление движения частицы для наблюдателей в обоих системах отсчета будет одинаковым. Как этот факт согласуется с принципом относительности?

14. Преобразования Лоренца для четырехмерных векторов; примеры четырехмерных векторов, используемых в электродинамике; их инварианты.

Произвольный контравариантный четырехмерный вектор с компонентами $a^k(x) = \{a^0(x),\ a^1(x),\ a^2(x),\ a^3(x)\}$ при преобразованиях координат $x \to x'$ преобразуется по закону:

$$a'^k(x') = \frac{\partial x'^k}{\partial x^m}\, a^m\big(x(x')\big).$$

Закон преобразования компонент ковариантного вектора $a_k(x)= \{a_0(x),\ a_1(x),\ a_2(x),\ a_3(x)\}$ выглядит иначе:

$$a'_k(x') = \frac{\partial x^m}{\partial x'^k}\, a_m\big(x(x')\big).$$

В обоих выражениях по повторяющемуся верхнему и нижнему индексам подразумевается суммирование по всем возможным значениям индекса $m = 0,\ 1,\ 2,\ 3$.

Компоненту $a^0(x)$ принято называть временной компонентой четырехмерного вектора, а $a^1(x),\ a^2(x),\ a^3(x)$ называют пространственными компонентами.

Для определенности примем следующее правило сопоставления компонент пространственной части четырехмерного вектора и проекций вектора на оси декартовой системы координат:

$$a^1(x) = a_x, \quad a^2(x) = a_y, \quad a^3(x) = a_z.$$

Следует отметить, что компоненты ковариантного вектора могут быть получены из компонент контравариантного вектора с помощью операции опускания индекса $a_n = g_{nm}a^m$. Аналогично, поднимая индекс, можно выразить компоненты контравариантного вектора через компоненты ковариантного $a^n = g^{nm}\, a_m$.

В декартовых координатах инерциальной системы отсчета компоненты метрического тензора g_{nm} и обратного к нему тензора g^{nm} имеют наиболее простой вид

$$g_{nm} = g^{nm} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}\{+1,\ -1,\ -1,\ -1\}.$$

В этом случае процедура опускания или поднятия индексов сводиться к умножению временной компоненты вектора на $+1$, а пространственных компонент на -1, поэтому:

$$a^0 = a_0, \quad a_x = a^1(x) = -a_1(x), \quad a_y = a^2(x) = -a_2(x), \quad a_z = a^3(x) = -a_3(x).$$

Для сокращения записи последние соотношения часто представляют в виде:

$$a^k = \{a^0,\ \vec{a}\}, \quad a_k = \{a_0,\ -\vec{a}\}, \ \text{где} \ \ \vec{a} = \{a_x,\ a_y,\ a_z\},$$

тем самым подчеркивая, что при опускании или поднятии индекса знак изменяется только у пространственной части четырехвектора.

Преобразования Лоренца связывают четырехмерные координаты точки x^k, измеренные в лабораторной системе отсчета, и координаты этой же точки, измеренные в системе отсчета, движущейся инерциально относительно лабораторной. В индексной записи преобразования Лоренца имеют вид:

$$x'^0 = \frac{x^0 - \beta\, x^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x'^1 = \frac{x^1 - \beta\, x^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3,$$

где предполагается, что движение штрихованной системы отсчета происходит в положительном направлении оси x со скоростью V, а также использованы обозначения $x^0 = ct$, $x'^{\,0} = ct'$ и $\beta = V/c$.

Для записи обратных преобразований достаточно заменить штрихованные координаты в левой части равенств на не штрихованные, а в правой части выполнить обратную замену — не штрихованных координат на штрихованные. Кроме этого, необходимо изменить знак у β на противоположный.

Используя связь координат лабораторной и штрихованной систем отсчета, нетрудно получить закон преобразования произвольного контравариантного четырехмерного вектора при преобразованиях Лоренца:

$$a'^0 = \frac{a^0 - \beta\, a^1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad a'^1 = \frac{a^1 - \beta\, a^0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad a'^2 = a^2, \quad a'^3 = a^3.$$

Инвариант, построенный из компонент четрырехвектора, не должен содержать свободных индексов, поэтому единственная возможность построить такую величину — это свернуть свободные индексы у ковариантного и контравариантного векторов:

$$I = a_k\, a^k = a^k\, a_k = a'_k\, a'^{\,k} = a'^{\,k}\, a'_k = inv.$$

В декартовых координатах инерциальной системы отсчета выражение для инварианта четырехвектора принимает более простую форму

$$a^k = \{a^0,\, \vec{a}\}, \quad a_k = \{a_0,\, -\vec{a}\}, \ \text{поэтому} \ I = a^k\, a_k = \left(a^0\right)^2 - \vec{a}^2.$$

Приведем примеры нескольких четрырехмерных векторов и их инварианты.

1. Четырехвектор координаты в пространстве Минковского

$$x^k = \Big\{\, x^0 = ct,\ \vec{r}\, \Big\}, \qquad x_k x^k = (ct)^2 - \vec{r}^2.$$

2. Четырехвектор плотности тока

$$j^k = \Big\{\, j^0 = \rho c,\ \vec{j}\,\Big\}, \qquad j_k\, j^k = (\rho\, c)^2 - \vec{j}^2.$$

3. Четырехвектор потенциала

$$A^k = \Big\{\, A^0 = \varphi,\ \vec{A}\,\Big\}, \qquad A_k\, A^k = \varphi^2 - \vec{A}^2.$$

4. Четырехвектор скорости

$$u^k = \frac{dx^k}{ds} = \left\{\, u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \vec{u} = \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1-\beta^2}}\,\right\}, \qquad u_k\, u^k = 1,$$

где $ds = c\sqrt{1-\beta^2}\, dt$ – интервал, $\beta = v/c$, и $\vec{v}$ – скорость частицы.

5. Четырехвектор импульса

$$p^k = mc\, u^k = \Big\{\, p^0 = \mathcal{E}/c, \quad \vec{p}\,\Big\}, \qquad p_k\, p^k = \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = m^2c^2.$$

6. Волновой четырехвектор

$$k^n = \left\{\, k^0 = \frac{\omega}{c},\ \vec{k}\,\right\}, \qquad k_n\, k^n = \frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2 = 0,$$

где ω и $\vec{k}$ – частота и волновой вектор электромагнитной волны.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- Укажите тензорный закон преобразования (скаляр, вектор, тензор) для каждой из следующих величин:

$$A_k j^k, \quad \frac{\partial}{\partial x^n}, \quad \frac{\partial A_k}{\partial x^n}, \quad m^2c^2u^k, \quad m^2c^2u^k - (u_n p^n)p^k, \quad \frac{\omega^2}{c^2}\, g_{mn} - k_m k_n.$$

- Четырехмерным вектором ускорения называют $w^k = du^k/ds$, где u^k – четырехмерный вектор скорости частицы, а ds – интервал. Докажите ортогональность четырехмерного вектора скорости и ускорения $u_k w^k = 0$.

- Верно ли, что закон дисперсии для электромагнитной волны в вакууме $\omega^2/c^2 - \vec{k}^2 = 0$ выполняется в любой инерциальной системе отсчета. Ответ обоснуйте прямым вычислением.

- Покажите, что четырехмерный вектор плотности тока для точечной частицы с зарядом q, движущейся со скоростью $\vec{v}$, может быть представлен в виде:
$$j^k(x) = c\rho(x)\,\frac{ds}{dx^0}\,u^k,$$
где u^k – четырехмерный вектор скорости частицы, ds – интервал, а $\rho(x) = q\delta\big(\vec{r} - \vec{r}_0(t)\big)$ – плотность заряда для точечной частицы, движущейся по закону $\vec{r}_0(t)$.

- Наблюдатель, движущейся с четырехмерной скоростью U^k (относительно лабораторной системы отсчета), исследует параметры частицы с массой m и четырехмерным импульсом P^k (относительно лабораторной системы отсчета). Доказать, что энергия частицы, измеренная движущимся наблюдателем $\mathcal{E} = cP_kU^k$.

15. Законы преобразования напряженностей электромагнитного поля. Тензор электромагнитного поля и его инварианты.

Тензор электромагнитного поля:
$$F_{ik} = -F_{ki} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$$

В декартовых координатах инерциальной системы отсчета компоненты тензора электромагнитного поля имеют вид:
$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем закон преобразования напряженностей электромагнитного поля при преобразованиях Лоренца. Обозначим символом $||$ компоненты напряженностей поля, направленные вдоль вектора относительной скорости систем отсчета $\vec{V}$, а символом $\perp$ обозначим компоненты поля перпендикулярные этой скорости. В терминах этих обозначений закон преобразования компонент поля примет вид:

$$\vec{E}'_{||} = \vec{E}_{||}, \qquad \vec{E}'_{\perp} = \frac{\vec{E}_{\perp} + \dfrac{1}{c}\,[\vec{V},\vec{H}]}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$\vec{H}'_{||} = \vec{H}_{||}, \qquad \vec{H}'_{\perp} = \frac{\vec{H}_{\perp} - \dfrac{1}{c}\,[\vec{V},\vec{E}]}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где $\beta = V/c$.

Инварианты тензора электромагнитного поля:

$$J_2 = F_{ik}F^{ki} = 2\big(\vec{E}^2 - \vec{H}^2\big), \quad J_4 = F_{ik}F^{kn}F_{nm}F^{mi} = 2\big(\vec{E}^2 - \vec{H}^2\big)^2 + 4(\vec{E},\vec{H})^2.$$

Часто для сокращения записи выбирают в качестве инвариантов тензора электромагнитного поля следующие независимые величины:

$$I_2 = \vec{E}^2 - \vec{H}^2, \qquad I_4 = (\vec{E},\vec{H})^2.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- В инерциальной системе отсчета в декартовых координатах запишите выражения F_{ik}, $F_{i\cdot}^{\cdot k}$, $F_{\cdot k}^{i\cdot}$, F^{ik}.
- Докажите инвариантность выражения $J_2 = F_{ik}F^{ki}$ при преобразованиях координат $x^k \to x'^k = x'^k\big(x\big)$.
- Найдите закон преобразования компонент тензора электромагнитного поля при:
    - $a)$ преобразованиях пространственной четности (зеркальное отражение) $\vec{r} \to \vec{r}' = -\vec{r}$, $t = t'$.
    - $b)$ при отражении времени $\vec{r}' = \vec{r}$, $t \to t' = -t$.
    - $c)$ на основании предыдущих вычислений установите закон преобразования выражения $\big(\vec{E},\vec{H}\big) \to \big(\vec{E}',\vec{H}'\big)$ при отражении пространственной четности $\vec{r} \to \vec{r}' = -\vec{r}$.

$d)$ на основании предыдущих вычислений установите закон преобразования вектора электрического $\vec{d} \to \vec{d}'$ и магнитного $\vec{m} \to \vec{m}'$ дипольного момента при отражении пространственной четности $\vec{r} \to \vec{r}' = -\vec{r}$.

- Преобразования Лоренца могут быть записаны в ковариантном виде следующим соотношением $x'^m = \Lambda^m_n x^n$, где Λ^m_n – тензор, зависящий от скорости движения штрихованной системы отсчета относительно лабораторной. Используя ковариантную запись уравнений Максвелла:

$$\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^m} + \frac{\partial F_{mi}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{km}}{\partial x^i} = 0, \quad \frac{\partial F^{mn}}{\partial x^n} = -\frac{4\pi}{c} j^m,$$

докажите инвариантность этих уравнений относительно преобразований Лоренца.

- Конформным преобразованием координат (scaling) называют $x^k \to x'^k = \lambda x^k$, где λ – постоянный коэффициент масштаба. Используя ковариантную запись уравнений Максвелла, покажите их инвариантность относительно конформного преобразования координат.

- ** Конформным метрическим преобразованием называют $g_{ik} \to g'_{ik} = \sigma(x) g_{ik}$, где $\sigma(x)$ – масштабная функция, зависящая от координат четырехмерного пространства-времени. Установите закон преобразования тензора электромагнитного поля, четырехмерного вектора плотности тока и производных $\partial/\partial x^n$ при конформном метрическом преобразовании. Используя полученные результаты, докажите инвариантность уравнений Максвелла относительно этого преобразования.

- В лабораторной системе отсчета для напряженностей электрического и магнитного поля плоской электромагнитной волны выполняется соотношение $\vec{H} = [\vec{k}/k, \vec{E}]$, где $\vec{k}$ – волновой вектор. Сохранится ли это соотношение в произвольной инерциальной системе отсчета, движущейся со скоростью $\vec{V}$ относительно лабораторной.

- Трехмерный, абсолютно антисимметричный аксиальный тензор Леви-Чивиты имеет вид:

$$e^{\alpha\mu\nu} = \begin{cases} 0, & \text{если хотя бы два индекса одинаковы;} \\ \pm 1, & \text{если все индексы разные;} \end{cases}$$

причем $e^{123} = +1$, а остальные компоненты тензора получаются путем перестановки индексов. Проверьте справедливость следующих соотношений:

$$E^{\alpha} = \Big\{E^1 = E_x,\ E^2 = E_y,\ E^3 = E_z\Big\} = F^{\alpha 0},$$

$$H^{\alpha} = \Big\{H^1 = H_x,\ H^2 = H_y,\ H^3 = H_z\Big\} = \frac{1}{2}\, e^{\alpha\mu\nu} F_{\mu\nu},$$

где α, μ, ν принимают значения $1 \ldots 3$.

- * Дуальным тензором электромагнитного поля называют $\star F^{ik} = e^{ikmn} F_{mn}$, где e^{ikmn} – четырехмерный, абсолютно антисимметричный тензор Леви-Чивиты, для которого $e^{0123} = 1$, а остальные компоненты получают перестановкой индексов. Покажите, что уравнения Максвелла могут быть записаны в виде:

$$\frac{\partial \star F^{mn}}{\partial x^n} = 0, \qquad \frac{\partial F^{mn}}{\partial x^n} = -\frac{4\pi}{c} j^m.$$

Как изменилась бы форма этих уравнений в случае существования магнитных зарядов?

16. Связь энергии, импульса, массы и скорости релятивистской частицы.

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \qquad \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}},$$

$$\mathcal{E} = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}, \qquad \vec{v} = \frac{c\vec{p}}{\sqrt{m^2c^2 + p^2}},$$

$$\mathcal{E} = c^2\frac{p}{v}, \qquad m = \frac{p}{v}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

$$\vec{p} = \frac{\mathcal{E}}{c^2}\vec{v}, \qquad m = \frac{\mathcal{E}}{c^2}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

$$p = \sqrt{\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - m^2c^2}, \qquad v = c\sqrt{1 - \frac{m^2c^4}{\mathcal{E}^2}},$$

$$m = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - p^2}, \qquad \vec{v} = \frac{c^2\vec{p}}{\mathcal{E}},$$

где $\mathcal{E}$, $\vec{p}$, $\vec{v}$, m — энергия, импульс, скорость и масса частицы.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- Используя цилиндрические координаты, выпишите импульс частицы.
- Найдите скорость центра инерции системы из двух одинаковых частиц, если в лабораторной системе у них импульсы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$.
- Получите разложение релятивистской кинетической энергии массивной частицы по малому параметру $(V/c)^2 \ll 1$ (с точностью до слагаемых V^4/c^4).

17. Уравнения движения релятивистской заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.

Для заряженной релятивистской частицы, движущейся в заданном электромагнитном поле, уравнение движения может быть представлено в ковариантном виде:

$$mc\frac{du^i}{ds} = f^i = \frac{q}{c}F^{ik}u_k\ , \quad F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k},$$

где u^i — четырехвектор скорости частицы, F_{ik} — тензор электромагнитного поля, в котором движется частица, $ds = c\sqrt{1 - v^2/c^2}dt$ — интервал, m и q — масса и заряд частицы.

При значении индекса $i = 0$ ковариантное уравнение движения частицы приводит к закону изменения кинетической энергии частицы

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = q(\vec{E}, \vec{v}),$$

а при значениях индекса $i = 1, 2, 3$ ковариантное уравнение переходит в "трехмерное"уравнение движения частицы:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{v}, \vec{H}\right],$$

где $\mathcal{E}$, $\vec{p}$ — релятивистские энергия и импульс частицы, а напряженности внешних полей

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t), \quad \vec{H} = \vec{H}(\vec{r}, t).$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- Покажите, что скорость массивной, заряженной частицы, движущейся в однородном электрическом поле $\vec{E}_0$, не превышает скорости света.
- Найдите траекторию частицы, движущейся в однородном постоянном магнитном поле $\vec{H}_0$, при условии, что в начальный момент времени ее импульс $\vec{p}_0 \perp \vec{H}_0$.

18. Выражение для плотности энергии, плотности импульса и потока энергии электромагнитного поля.

$$\mathcal{W} = \left[\frac{\text{эрг}}{\text{см}^3}\right] = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \quad \text{— плотность энергии электромагнитного поля,}$$

$$\vec{g} = \left[\frac{\text{дин} \cdot \text{ с}}{\text{см}^3}\right] = \frac{1}{4\pi c}\left[\vec{E},\, \vec{H}\right] \quad \text{— плотность импульса электромагнитного поля,}$$

$$\vec{\sigma} = \left[\frac{\text{эрг}}{\text{см}^2}\right] = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\, \vec{H}\right] \quad \text{— плотность потока энергии электромагнитного поля.}$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- Найдите среднее по периоду значение плотности энергии эллиптически поляризованной электромагнитной волны с частотой ω, распространяющейся в положительном направлении оси Z.
- Получите выражение для вектора плотности импульса электромагнитного поля для излучения в электрическом дипольном приближении.

19. Функция Лагранжа релятивистской заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле. Уравнения движения в форме Лагранжа.

Функция Лагранжа релятивистской частицы с массой m и зарядом q, движущейся во внешнем заданном электромагнитном поле имеет вид:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} - e\varphi + \frac{e}{c}(\vec{A},\vec{v}) \ ,$$

где потенциалы внешнего электромагнитного поля считаются заданными

$$\varphi = \varphi(\vec{r},t) \ , \ \vec{A} = \vec{A}(\vec{r},t)$$

Применение принципа стационарного действия $\delta S = 0$ к описанию движения частицы, приводит к уравнению Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0,$$

где q_α – обобщенная координата, $\dot{q}_\alpha$ – обобщенная скорость.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

- Запишите Лагранжиан релятивистской заряженной частицы в ковариантном виде.
- Запишите Лагранжиан заряженной частицы движущейся в однородных электрическом и магнитном полях $\vec{E}$ и $\vec{H}$.
- Получите выражение для функции Лагранжа заряженной частицы в слаборелятивистском пределе $v/c \ll 1$ с точностью до слагаемых порядка v^4/c^4.

Литература

1. Батыгин В.П., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. М. Наука, 1962.
2. Денисов В.И. Лекции по электродинамике. М., УНЦ ДО, 2007.
3. Денисов В.И. Введение в электродинамику материальных сред. М., МГУ, 1989.
4. Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.,Мир, 1965.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М., Наука, 1988.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.,Наука, 1982.
7. Левич В.Г. Курс теоретической физики, т.1.
8. Логунов А.А. Лекции по теории относительности. Современный анализ проблемы. М., Наука, 1986.
9. Мандельштам Л.И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М., Наука, 1972.
10. Пановский В., Филлипс М. Классическая электродинамика. М., Физматгиз, 1963.
11. Угаров В.А. Специальная теория относительности. М. Наука, 1969.
12. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.-Л., 1966.

Список вопросов и задач к зачету и экзамену находится на сайте кафедры квантовой теории и физики высоких энергий по адресам: hep.itpm.msu.su или hep.phys.msu.ru

Для заметок