

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра квантовой теории
и физики высоких энергий.

З А Д А Н И Я

по курсу "ЭЛЕКТРОДИНАМИКА" для студентов 3-его курса
физического факультета МГУ, 2007-2008 учебный год

Авторы-составители:
В.И.ГРИГОРЬЕВ
В.И.ДЕНИСОВ
В.С.РОСТОВСКИЙ

МОСКВА- 2007

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРАММА-МИНИМУМ К ЗАЧЕТУ

Часть 1. "Электродинамика полей и зарядов в вакууме.

Специальная теория относительности."

1. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме. Сила Лоренца.
2. Уравнения Максвелла в интегральной форме.
3. Закон сохранения заряда и закон сохранения энергии в электродинамике (в дифференциальной форме).
4. Связь полей и потенциалов. Калибровка Лоренца и уравнения для потенциалов в этой калибровке.
5. Решение уравнений для потенциалов в виде запаздывающих потенциалов.
6. Электрический дипольный момент. Потенциал и напряженность поля электрического диполя в электростатике. Энергия диполя во внешнем поле.
7. Магнитный дипольный момент. Векторный потенциал и напряженность поля магнитного диполя в статике.
8. Свойства плоских электромагнитных волн. Связь векторов поля \vec{H} и \vec{E} , волнового вектора \vec{k} и частоты ω .
9. Потенциалы, напряженности полей, интенсивность и угловое распределение электрического дипольного излучения.
10. Сила радиационного трения в нерелятивистском приближении.
11. Преобразования Лоренца для координат-времени в 3-мерном виде.
12. Релятивистский закон сложения скоростей.
13. Преобразования Лоренца для четырехмерных векторов; примеры четырехмерных векторов (радиус-вектор, скорость, плотность тока, потенциалы, волновой вектор, импульс и их инварианты).
14. Законы преобразования напряженностей электромагнитного поля. Тензор электромагнитного поля и его инварианты.
15. Связь энергии, импульса, массы и скорости релятивистской частицы.
16. Уравнения движения релятивистской заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.
17. Выражения для плотности энергии , плотности импульса и потока энергии электромагнитного поля.
18. Функция Лагранжа релятивистской заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле . Уравнения движения в форме Лагранжа.
19. Лапласиан от скалярной функции в декартовых прямоугольных, цилиндрических и сферических координатах.

ПРИМЕЧАНИЯ:

1. Минимальным требованием для зачета является знание всех соответствующих формул без вывода.

2. Знание перечисленных вопросов является необходимым , но не достаточным для зачета. Достаточным является умение применить данные формулы к решению задач.

Задание 1. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ. ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ.

1.1. Используя векторный оператор "набла" $\vec{\nabla} = \vec{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z}$, вычислить $\text{grad}(\varphi \cdot \psi)$, $\text{div}(\varphi \vec{A})$, $\text{rot}(\varphi \vec{A})$, $\text{div}[\vec{E} \times \vec{H}]$, $\text{rot}[\vec{A} \times \vec{B}]$, $\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B})$, $\Delta(\varphi \cdot \psi)$, где φ, ψ – скалярные, $\vec{A}, \vec{B}, \vec{E}, \vec{H}$ – векторные функции координат.

1.2. Вычислить $\text{grad} \varphi(r)$, $\text{div}(\vec{r} \cdot \varphi(r))$, $\text{rot}(\vec{r} \cdot \varphi(r))$, $\text{grad}(\vec{E} \cdot \vec{r})$, $(\vec{E} \vec{\nabla}) \vec{r}$, $\text{div}[\vec{H} \times \vec{r}]$, $\text{rot}[\vec{H} \times \vec{r}]$, $\text{grad} f(t - r/c)/r$, где \vec{r} – радиус-вектор, \vec{E} и \vec{H} – постоянные векторы, φ и f – заданные функции скалярного аргумента.

1.3*. Записать $\text{grad} \varphi$, $\text{div} \vec{A}$, $\text{rot} \vec{A}$ в цилиндрической и сферической системах координат, пользуясь выражениями для операторов grad , div , rot в произвольных ортогональных координатах (q_1, q_2, q_3)

$$\text{grad} \varphi = \vec{e}_1 \cdot \frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \vec{e}_2 \cdot \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \vec{e}_3 \cdot \frac{1}{h_3} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q_3},$$

$$\text{div} \vec{B} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 B_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 h_1 B_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 B_3) \right\},$$

$$\text{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{e}_1}{h_2 h_3} & \frac{\vec{e}_2}{h_3 h_1} & \frac{\vec{e}_3}{h_1 h_2} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{e}_1 & h_2 \vec{e}_2 & h_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix},$$

где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – базисные единичные векторы в точках q_1, q_2, q_3 , h_1, h_2, h_3 – коэффициенты Ламе.

1.4. Записать уравнение Лапласа $\Delta \varphi = 0$ в произвольных ортогональных, в декартовых, цилиндрических и в сферических координатах.

1.5. Вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cdot \delta(\Phi(x)) \cdot dx$; нули $\Phi(x)$ предполагаются известными.

1.6. Вычислить $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \delta(4x^2 - 1) \cdot dx$.

1.7. Вычислить $\int_1^{10} x \cdot \delta(\sin \frac{\pi x}{3}) \cdot dx$.

1.8. Разложить $\delta(X - x_0)$ в интеграл Фурье.

1.9. Написать выражение для плотности точечного заряда в декартовых и сферических координатах.

1.10. Заряд q равномерно распределен по поверхности шара радиуса R . Записать выражение для поверхностной и объемной плотности заряда.

1.10а. Заряд q равномерно распределен по тонкому кольцу радиуса R . Записать выражение для линейной и объемной плотности заряда.

1.11. Пусть $\vec{n}(\vartheta, \varphi) = \{x/r, y/r, z/r\} = \{\sin \vartheta \cdot \cos \varphi, \sin \vartheta \cdot \sin \varphi, \cos \vartheta\}$ – вектор единичной длины, все направления которого в пространстве равновероятны. Найти усредненные значения произведений $\overline{n_i n_j}$ и $\overline{n_i n_j n_k n_l}$, где n_i – проекция вектора \vec{n} на ось i .

Задание 2. ЭЛЕКТРОСТАТИКА, МАГНИТОСТАТИКА.

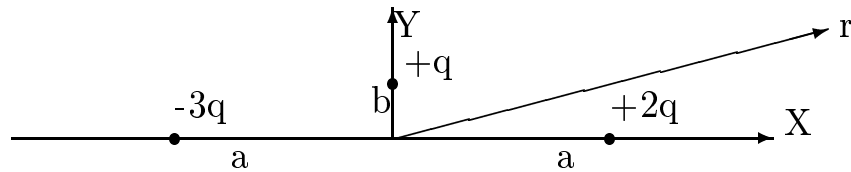
2.1. Решить уравнение $\Delta\varphi = -4\pi\rho(\vec{r})$ разложением в интеграл Фурье.

2.2. Найти распределение заряда и полный заряд системы, потенциал которой равен $\varphi(r) = (A/r) \cdot \exp(-r/b)$.

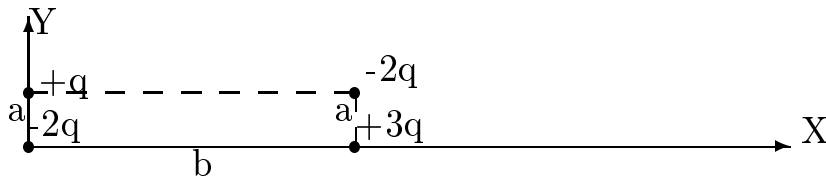
2.3. Найти потенциал $\varphi(r)$ сферически симметрического распределения зарядов $\rho(r)$.

2.4. В атоме водорода в основном состоянии заряд электрона ("электронное облако") распределен с плотностью $\rho(r) = -e/(\pi \cdot a^3) \cdot \exp(-2r/a)$. Найти потенциал $\varphi(r)$ электрического поля атома (ядро + электронная оболочка), энергию взаимодействия электронного облака с ядром и энергию электронного облака. Ядро считать точечным зарядом.

2.5. Найти потенциал системы зарядов, изображенный на рисунке, на больших расстояниях $r \gg a \sim b$ от системы.

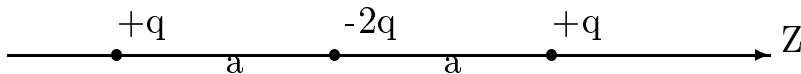


2.6. То же для системы



2.7. Найти потенциал плоского диска радиуса R , заряженного с поверхностной плотностью $\sigma_S = q \cdot \sin(\theta)/R^2$, на больших расстояниях $r \gg R$.

2.8. Найти потенциал системы зарядов, изображенной на рисунке, на больших расстояниях $r \gg a$ от системы.



2.9. Два коаксиальных равномерно заряженных кольца из тонкой проволоки расположены в одной плоскости. Их радиусы a и b , заряды $+q$ и $-q$. Найти скалярный потенциал φ на больших расстояниях $r \gg b > a$ от такой системы зарядов.

2.10*. Поверхность атомного ядра описывается выражением

$R(\Theta) = R_0 \cdot (1 + \lambda \cdot P_2(\cos \Theta))$, где $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$ – полином Лежандра второго порядка. Параметр деформации λ мал. Вычислить с точностью до линейных по λ членов квадрупольный момент ядра.

2.11. Скалярный потенциал, создаваемый некоторым распределением электрического заряда, на пространственной бесконечности убывает как $1/r^2$. Означает ли это, что электрический дипольный момент данного распределения зарядов отличен от нуля?

2.12. Найти энергию взаимодействия диполя \vec{p} и точечного заряда q . Найти силу и момент сил, действующие на диполь.

2.13. Найти энергию взаимодействия двух точечных диполей \vec{p}_1 и \vec{p}_2 , расположенных на большом расстоянии друг от друга.

2.14. Найти энергию взаимодействия точечного заряда q и квадруполья $D_{\alpha\beta}$, расположенных на большом расстоянии друг от друга.

2.15. Найти векторный потенциал и магнитное поле шара радиуса R , равномерно заряженного по объему зарядом q и вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр, на больших расстояниях r , $r \gg R$.

Задание 3. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ. ПОТЕНЦИАЛЫ ЛИЕНАРА-ВИХЕРТА. БЛИЖНЯЯ И ВОЛНОВАЯ ЗОНЫ.

3.1. Плоская монохроматическая электромагнитная волна распространяется в вакууме вдоль оси z . Записать выражения для $\vec{E}(z, t)$, $\vec{H}(z, t)$ если волна: а) линейно поляризована, б) поляризована по кругу.

3.2. Найти плотность энергии и плотность потока энергии для плоской монохроматической электромагнитной волны, имеющей эллиптическую поляризацию; волновой вектор \vec{k} направлен по оси Z .

3.3. Радиус-вектор \vec{r} точечного заряда q изменяется по заданному закону $\vec{r} = \vec{r}_0(t)$. Используя формулы для запаздывающих потенциалов, найти скалярный φ и векторный \vec{A} потенциалы заряда (называемые потенциалами Лиенара-Вихерта).

3.4. Используя формулы для потенциалов Лиенара-Вихерта, найти скалярный и векторный потенциалы равномерно движущегося заряда q .

3.5*. Разлагая в ряд по полному запаздыванию, записать выражения для φ , \vec{A} , \vec{E} , \vec{H} произвольно движущегося заряда, с точностью до $(v/c)^3$ включительно.

3.6*. Разложить скалярный и векторный потенциалы в ряд по локальному запаздыванию в дипольном приближении. Оценить вклад в потенциалы и поля от различных слагаемых в предельных случаях $\omega = 0$ (статика), $a \ll r \ll c/\omega$ (ближняя зона) и $a \ll c/\omega \ll r$ (волновая зона).

Задание 4. ИЗЛУЧЕНИЕ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ, ДВИЖУЩИХСЯ ПО ЗАДАННОМУ ЗАКОНУ.

4.1. Заряд e совершает гармонические колебания вдоль оси Z с амплитудой a и частотой ω , ($a \ll c/\omega$). Найти полную интенсивность и угловое распределение излучения. Исследовать поляризацию.

4.2. Заряд e движется с постоянной угловой скоростью ω по окружности радиуса R . Найти угловое распределение и полную интенсивность излучения. Исследовать поляризацию излучения.

4.3. Круговой контур радиуса a с постоянным током J вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, которая образует угол α с нормалью к плоскости контура. Найти угловое распределение и полную интенсивность излучения. Указать тип поляризации.

4.4. Найти полную интенсивность и угловое распределение E2 (электрического квадрупольного) излучения линейного гармонического осциллятора (заряд e , частота ω , амплитуда a , $a \ll c/\omega$). Какова частота E2 излучения? Сравнить с полной интенсивностью и частотой E1 (электрического дипольного) излучения.

4.5. Найти полную интенсивность, угловое распределение и частоту излучения системы из двух одинаковых зарядов, вращающихся с угловой скоростью ω по окружности радиуса R и сдвинутых на угол $\alpha = \pi$ (т.е. в противофазе).

4.6. Оценить при каком угле $\varphi = \pi - \alpha$ интенсивности E1 и E2 излучений в задаче 4.5. будут одинаковыми.

4.7. Электрический диполь \vec{p} гармонически колеблется вдоль своей оси (оставаясь параллельным самому себе) с амплитудой a и частотой ω . Найти частоту излучения и энергию, излучаемую за период.

Задание 5. ИЗЛУЧЕНИЕ ЧАСТИЦ ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ.

5.1. Частица с зарядом e и массой m налетает из бесконечности на неподвижный кулоновский центр с зарядом q того же знака. Столкновение лобовое, скорость частицы на бесконечности равна v_0 . Найти полную энергию, излученную частицей за все время соударения.

5.2. Нерелятивистская частица с зарядом e , массой m рассеивается в кулоновском поле бесконечно тяжелого силового центра (заряд Q) с прицельным расстоянием a , обеспечивающим малость отклонения, $mv_0^2 \gg eQ/a$ (т.наз. периферическое рассеяние). Найти полную энергию, излученную во время соударения, если скорость частицы на бесконечности равна v_0 .

5.3. Нерелятивистская частица с зарядом e , массой m движется в однородном постоянном магнитном поле \vec{H} . Найти время, в течение которого энергия частицы уменьшается в 10 раз вследствие излучения.

5.4. Оценить число оборотов и время жизни атома в модели Резерфорда, считая $v \ll c$, если начальный радиус орбиты $a = 0,5 \cdot 10^{-8}$ см, $m = 0,9 \cdot 10^{-27}$ г, $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$ абс.ед.

5.5*. Оценить по порядку величины энергию, излученную при периферическом рассеянии протона с зарядом e и массой m и нейтрона с магнитным моментом μ . Прицельное расстояние b .

Задание 6. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА.

Задание 7. РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН. СИЛА ЛУЧИСТОГО ТРЕНИЯ.

7.1. Линейно поляризованная плоская электромагнитная волна частоты ω падает на изотропный гармонический осциллятор с собственной частотой ω_0 . Найти дифференциальное и полное сечение рассеяния в зависимости от частоты с учетом силы радиационного трения.

7.2. Изотропный гармонический осциллятор с зарядом e , массой m и собственной частотой ω_0 помещен в однородное магнитное поле \vec{H} . Определить движение осциллятора. Исследовать частоты и поляризацию излучения в зависимости от направления. Магнитное поле считать слабым, $eH/(mc) \ll \omega_0$.

7.3. Учитывая силу радиационного трения, найти силу давления света на нерелятивистский электрон.

7.4*. Исследовать рассеяние света частоты ω на двух независимых осцилляторах с собственной частотой ω_0 в зависимости от расстояния R между осцилляторами. Вектор \vec{E} падающей волны направлен вдоль линии, соединяющей осцилляторы. Амплитуда колебаний осциллятора мала по сравнению с длиной волны. Найти дифференциальное сечение рассеяния.

7.5. Найти момент количества движения, который уносится за единицу времени излучением от точечного заряда e , вращающегося с постоянной угловой скоростью ω по окружности радиуса R .

Задание 8. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА.

8.1. Получить формулы для преобразования радиуса-вектора \vec{r} и времени t при переходе из одной инерциальной системы в другую, имеющую относительно первой произвольно направленную скорость \vec{V} .

8.2. Используя инвариантность фазы и преобразования Лоренца, найти закон преобразования частоты и волнового вектора.

8.3. На базе релятивистской теории дать объяснение явлению астрономической аберрации.

8.4. На базе релятивистской теории дать объяснение результатам опытов Физо.

8.5. Покоящийся атом испускает фотон частоты ω . В каких пределах изменяется частота излучения этого атома, если он движется со скоростью V ?

8.5а. Поскольку Земля движется вокруг Солнца, частоты излучения всех внеземных источников испытывают периодические изменения. Оценить масштабы этих изменений $\delta\omega/\omega$, а также вклад в эти изменения собственного суточного вращения Земли.

8.6. Найти зависимость между углом падения и углом отражения, а также закон преобразования частоты при отражении света от зеркала, движущегося с постоянной скоростью V .

8.7. Найти закон преобразования длины волны при переходе в систему координат, движущуюся под углом Θ к направлению волнового вектора.

8.8. Найти потенциалы φ, \vec{A} и напряженности полей \vec{E}, \vec{H} точечного заряда e , движущегося равномерно со скоростью \vec{V} .

8.9. Найти потенциалы точечного диполя \vec{d} , движущегося поступательно с постоянной скоростью \vec{V} .

Задание 9. ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА. ТЕНЗОР ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ.

Краткое введение.

Изучение уравнений электродинамики показало, что пространство и время представляют собой единое целое – четырехмерное пространство-время. В этом 4-мерном пространстве мы можем ввести четыре взаимно ортогональные оси: $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Тогда радиус-вектор некоторой точки этого пространства будет иметь четыре компоненты и его можно записать в виде: $x^i \equiv \{x^0, x^1, x^2, x^3\} \equiv \{ct, \vec{r}\}$. При такой записи обычно считают, что любой индекс, обозначенный латинской буквой (i, j, k и т.д.) может принимать четыре значения: $i = 0, 1, 2, 3$. Совершенно аналогично и любой другой 4-х вектор A^i можно спроектировать на координатные оси и определить его проекции $A^i = \{A^0, A^1, A^2, A^3\}$. По аналогии с 4-х вектором x^i компоненту A^0 называют временной компонентой, а компоненты A^1, A^2, A^3 – про-

странственными компонентами. В декартовых координатах компонентам A^1, A^2, A^3 соответствуют компоненты A_x, A_y, A_z .

Следующим по сложности (после 4-вектора) объектом является тензор второго ранга, имеющий два индекса: T^{ik} . Так как индексы i и k у этого тензора могут принимать независимо друг от друга значения $0, 1, 2, 3$, то данный тензор можно представить в виде матрицы, строки которой нумеруются индексом i (первый индекс), а столбцы - индексом k (второй индекс). При этом следует учесть, что в отличие от обычной матрицы здесь нумерация начинается не с единицы, а с нуля: сначала идет нулевая строка, за ней первая и т.д.

Одним из наиболее важных тензоров второго ранга является контравариантный *метрический тензор* g^{ik} . Предполагается, что определитель матрицы g^{ik} всегда отличен от нуля, и поэтому по данной матрице мы всегда можем построить ей обратную. Тензор g_{ik} соответствует матрице, обратной к g^{ik} ; его называют метрическим тензором с ковариантными индексами (или, просто, ковариантным метрическим тензором). В декартовых координатах инерциальной системы отсчета псевдоевклидова пространства-времени (пространства специальной теории относительности) матрицы, соответствующие тензорам g_{ik} и g^{ik} , совпадают:

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g_{ik}.$$

Так как матрицы g^{ik} и g_{ik} взаимно обратны, то выполняется соотношение

$$\sum_{m=0}^3 g_{im} \cdot g^{mk} = \delta_i^k = \begin{cases} = 0 & \text{при } i \neq k, \\ = 1 & \text{при } i = k. \end{cases}$$

В тензорном анализе обычно принимают правило суммирования Эйнштейна: по индексам, обозначенным одной и той же буквой и стоящим один сверху (контравариантный индекс), а другой внизу (ковариантный индекс) предполагается суммирование по всей совокупности принимаемых данными индексами значений. В силу этого правила, записывая выражение $g_{im} \cdot A^{mk}$, мы подразумеваем, что по индексу m происходит суммирование от 0 до 3:

$$g_{im} \cdot A^{mk} \equiv \sum_{m=0}^3 g_{im} \cdot A^{mk}.$$

Это правило позволяет в ряде случаев значительно упрощать запись сложных тензорных выражений.

Используя метрический тензор, мы можем поднимать и опускать индексы и у других тензоров, и, тем самым, находить связь между контра- и ковариантными компонентами одного и того же тензора. По определению имеем:

$$A_i = g_{im} \cdot A^m, \quad T_i^k = g_{im} \cdot T^{mk}, \quad T_{ik} = g_{im} \cdot g_{kn} \cdot T^{mn},$$

$$A^i = g^{im} \cdot A_m, \quad T^i_k = g^{im} \cdot T_{mk}, \quad T^{ik} = g^{im} \cdot g^{kn} \cdot T_{mn}.$$

С помощью метрического тензора можно получить обобщение понятия расстояния между двумя точками на случай 4-х мерного пространства-времени. Соответствующее "расстояние" в этом случае называется интервалом ds ; по определению квадрат интервала равен:

$$ds^2 \equiv g_{ik} dx^i dx^k \equiv dx_k \cdot dx^k.$$

В декартовых координатах инерциальной системы отсчета псевдо-евклидова пространства-времени квадрат интервала имеет вид: $ds^2 = c^2 dt^2 - (d\vec{r})^2$, отсюда уже видно, что в 4-мерном пространстве-времени "квадрат" интервала ds^2 не является знакоопределенным: в зависимости от величин dt и $d\vec{r}$ он может быть меньше, равен или больше нуля.

При преобразовании координат 4-мерного пространства-времени $x'^i = x'^i(x^m)$ (переход от нештрихованных координат x^m к штрихованным координатам x'^i) ковариантные четырехвекторы и тензоры 2-го ранга преобразуются по закону:

$$\frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x^m}, \quad A'_i = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \cdot A_m, \quad T'_{ik} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \cdot \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} \cdot T_{mn}.$$

Для контравариантных компонент имеем:

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} dx^k, \quad A'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} A^k, \quad T'^{ik} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^m} \cdot \frac{\partial x'^k}{\partial x^n} \cdot T^{mn}.$$

9.1.* На плоскости введена декартова косоугольная система координат, угол между осями которой равен ω . Записать метрический тензор и формулы для опускания и поднятия индексов (т.е. для перехода от контравариантных компонент к ковариантным и обратно).

9.2. Записать компоненты ко- и контравариантного метрического тензора в сферических координатах.

9.3. Дан антисимметричный тензор электромагнитного поля $F_{ik} = -F_{ki}$, ковариантные компоненты которого в декартовых координатах инерциальной системы отсчета можно представить в виде

$$F_{ik} \equiv \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix},$$

где E_x, E_y, E_z и H_x, H_y, H_z - декартовы проекции векторов напряженностей электрического \vec{E} и магнитного \vec{H} полей. Найти тензор F^{ik} .

9.4. Учитывая преобразования Лоренца и используя закон преобразования тензора второго ранга, найти формулы преобразования компонент \vec{E} и \vec{H} при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, движущейся относительно первой вдоль оси x со скоростью V .

9.5. Обобщить закон преобразования векторов \vec{E} и \vec{H} при преобразовании Лоренца на случай произвольного направления вектора относительной скорости \vec{V} .

9.6. В лабораторной системе координат угол между напряженностями полей \vec{E} и \vec{H} равен φ . Найти систему координат, в которой они параллельны. Всегда ли задача имеет решение? Единственно ли оно?

9.7. Электрон обладает спиновым моментом количества движения s , ($s = \hbar/2$) и связанным с ним магнитным моментом $\mu = es/(mc)$. Оценить энергию взаимодействия магнитного момента электрона в атоме водорода с кулоновским полем ядра.

9.8. Используя результаты задачи 9.3, найти выражения для $F^{ik}F_{ik}$ и сравнить их с выражением для $F'^{ik}F'_{ik}$; выразить результат через напряженности полей.

9.9*. То же для $e^{iklm}F_{ik}F_{lm}$. Учесть, что в инерциальных системах отсчета абсолютно антисимметричный тензор Леви-Чивиты имеет вид:

$$e^{iklm} = \begin{cases} 0, & \text{если хотя бы два индекса одинаковы,} \\ \pm 1, & \text{если все индексы разные,} \end{cases}$$

причем $e^{0123} = +1$.

9.10. Найти закон преобразования амплитуд векторов \vec{E} и \vec{H} электромагнитной волны при преобразованиях Лоренца.

Задание 10. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ.

10.1. При какой энергии частицы, имеющей массу покоя m , время ее распада в N раз больше, чем в собственной системе отсчета?

10.2. Частица с массой m_1 и скоростью v_1 поглощается частицей массы m_2 , первоначально покоившейся. Найти массу M и скорость V образовавшейся частицы.

10.3. Покоящееся возбужденное ядро с энергией возбуждения $\mathcal{E} = \hbar\omega_0$ испускает гамма-квант. Найти частоту гамма-кванта с учетом отдачи ядра. Масса покоя невозбужденного ядра M , $Mc^2 \gg \hbar\omega_0$.

10.4. Квант света с частотой ω_0 рассеивается на покоящемся свободном электроне. Найти зависимость частоты ω рассеянного фотона от угла рассеяния θ .

10.5*. То же для случая, когда электрон ультрарелятивистский, его импульс $|\vec{P}| \gg mc$ и составляет угол θ_0 с направлением движения первичного γ -кванта.

10.6. Частица с массой m_1 налетает на покоящуюся частицу с массой m_2 . Происходит реакция, в которой рождаются частицы с общей массой $M > m_1 + m_2$. Найти энергетический порог реакции T , т.е. минимальное значение кинетической энергии налетающей частицы, начиная с которого реакция становится энергетически возможной.

10.7. Найти пороговую энергию фоторождения π^0 -мезона на нулоне: $n + \gamma \rightarrow n + \pi^0$. Массы покоя нуклона M и π^0 -мезона m известны.

10.8. Частица из ускорителя, имевшая массу покоя m и полную энергию \mathcal{E}_1 , движется к покоящейся частице-мишени той же массы. Найти суммарную кинетическую энергию T двух частиц в системе центра инерции.

10.9. Опираясь на законы сохранения энергии и импульса, показать, что невозможны ни испускание, ни поглощение фотона свободным электроном.

10.9а. Опираясь на законы сохранения энергии и импульса, показать, что невозможны ни превращение свободно движущегося π^0 -мезона в один гамма-квант, ни обратная реакция.

10.10. π -мезон с массой покоя m , двигавшийся со скоростью v , распадается на два гамма-кванта. Найти энергетический спектр гамма-квантов в лабораторной системе координат.

10.11. Найти массу системы, состоящей из двух фотонов одинаковой частоты ω , если угол между их волновыми векторами равен θ .

10.12*. Определить возможные пределы энергии антинейтрино, образующегося при бета-распаде нейтрона, $n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$.

Задание 11. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА.

Задание 12. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ПОЛЯХ. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ФОРМЕ ЛАГРАНЖА.

12.1. Релятивистская частица с зарядом e и массой m движется в однородном электрическом поле \vec{E} . При $t = 0$ частица находилась в начале координат и имела импульс $\vec{p}_0 \perp \vec{E}$. Найти закон движения частицы - явную зависимость $\vec{r}(t)$ и $\vec{v}(t)$.

12.2. Релятивистская частица с зарядом e и массой m движется в однородном магнитном поле \vec{H} . При $t = 0$ частица находилась в начале координат и имела начальную скорость v_0 . Найти закон движения частицы. Указать все интегралы движения в данном случае.

12.3. Записать уравнения движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле, используя функцию Лагранжа этой частицы $L = -mc^2 \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} - e\varphi(\vec{r}, t) + e(\vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t))/c$.

12.4. Заряженная частица (заряд e , масса m) движется в поле силового центра - точечного заряда q . Выписать все интегралы движения.

Задание 13. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА. ИЗЛУЧЕНИЕ БЫСТРО ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ.

13.1. Найти полную интенсивность излучения релятивистской заряженной частицы, переходя из сопутствующей системы координат в лабораторную. Выразить интенсивность излучения: а) через скорость и ускорение; б) через внешние поля.

13.2. Релятивистская частица с зарядом e и массой m движется по круговой орбите постоянного радиуса R . Найти зависимость мощности излучения от энергии частицы.

13.3*. Релятивистская заряженная частица движется по окружности. В сопутствующей системе угловое распределение излучения вперед и назад одинаково. Переходя в лабораторную систему координат и используя формулу для абберрации света, объяснить мгновенное угловое распределение излучения. В частности, оценить створ углов, в который будет излучаться половина энергии; каким углам в лабораторной системе соответствуют передняя и задняя полусферы сопутствующей системы?

ЗАЧЕТ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРАММА-МИНИМУМ

Часть 2. "Электродинамика сплошных сред".

1. Уравнения Максвелла в веществе в дифференциальной и интегральной формах.
2. Уравнения для потенциалов в однородной изотропной среде.
3. Граничные условия для полей в кусочно-однородной среде.
4. Закон сохранения энергии в дифференциальной форме. Физический смысл каждого из слагаемых.
5. Постановка задачи (уравнения и граничные условия) для потенциалов в электростатике.
6. Квазистационарное приближение. Условия применимости. Уравнения второго порядка для полей.
7. Глубина проникновения полей в проводниках. Толщина скин-слоя.
8. Основные уравнения магнитной гидродинамики.
9. Записать уравнения для полей и материальные уравнения для движущихся проводников и диэлектриков. Обобщенный закон Фарадея.
10. Комплексная диэлектрическая проницаемость, физический смысл ее действительной и мнимой частей.
11. Диэлектрическая проницаемость разреженного нейтрального газа.
12. Плоские электромагнитные волны в слабопроводящем веществе.
13. Фазовая и групповая скорости.
14. Отражение и преломление электромагнитных волн на плоской границе раздела прозрачных сред.

Задание 15. ЭЛЕКТРОСТАТИКА ПРОВОДНИКОВ. МЕТОД ИЗОБРАЖЕНИЙ.

15.1. Точечный заряд q расположен на расстоянии a от поверхности бесконечно протяженной проводящей пластины толщины h . Найти скалярный потенциал φ . Решение искать методом изображений. Проверить, что решение удовлетворяет уравнению и граничным условиям. Вычислить плотность поверхностных зарядов σ_S , энергию и силу взаимодействия заряда с пластиной. Найти полный индуцированный заряд.

15.2. Точечный заряд q расположен внутри прямого угла, образованного двумя бесконечными полуплоскостями, разграничивающими проводник и вакуум. Найти потенциал и плотность поверхностных зарядов.

15.2а. Проанализировать возможность решения, если заряд находится вне прямого угла.

15.3. Точечный диполь \vec{p} расположен в вакууме на расстоянии a от бесконечной плоской границы проводника. Найти потенциал, плотность поверхностных зарядов, энергию, силу и момент силы, действующие на диполь.

15.4. Точечный заряд q находится на расстоянии a от центра заземленного проводящего шара радиуса R . Найти потенциал, плотность поверхностных зарядов и полный заряд, индуцированный на шаре, энергию и силу взаимодействия.

15.5. Точечный заряд q расположен на расстоянии a от центра изолированного проводящего шара радиуса R , на который нанесен заряд e . Найти потенциал, плотность поверхностных зарядов, энергию и силу взаимодействия.

Задание 16. ПОТЕНЦИАЛЫ И ЕМКОСТИ.

16.1. Найти зависимость емкости системы двух проводящих шаров с радиусами R_1 и R_2 от расстояния L между ними, $L \gg R_1 \sim R_2$.

16.1а. То же при $R_1 = R_2 = R$ с точностью до $(R/L)^3$.

16.2. Равномерно заряженная тонкая нить (линейная плотность заряда κ) расположена на расстоянии a от оси проводящего незаряженного цилиндра радиуса R , $a > R$. Найти потенциал результирующего электрического поля. Найти плотность поверхностных зарядов на цилиндре, а также энергию и силу взаимодействия нити с цилиндром, приходящиеся на единицу длины.

16.3*. Определить емкость единицы длины двух параллельных бесконечных цилиндрических проводников. Радиусы проводников равны R_1 и R_2 , расстояние между осями $L > R_1 + R_2$.

16.4. Доказать теорему взаимности.

16.4а. Точечный заряд q расположен между бесконечными параллельными проводящими плоскостями. Расстояния от заряда до плоскостей равны a и, соответственно, b . Используя теорему взаимности, найти заряды, индуцированные на каждой из плоскостей.

Задание 17. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ.

17.1. Незаряженный проводящий шар радиуса R вносится в электрическое поле, которое в отсутствие шара было однородным и равным \vec{E}_0 . Определить результирующее поле \vec{E} и плотность поверхностных зарядов на шаре.

17.2. Проводящий шар радиуса R разрезан на два полушария, соединенные между собой, и помещен во внешнее однородное поле \vec{E}_0 , направленное перпендикулярно плоскости разреза. Найти силу, действующую на каждое из полушарий.

17.2а. То же, но поле \vec{E}_0 параллельно плоскости разреза.

17.3. Проводящий цилиндр радиуса R помещен во внешнее однородное электрическое поле \vec{E}_0 , перпендикулярное оси цилиндра. Найти потенциал результирующего поля.

17.4*. Проводящий шар радиуса R_0 имеет заряд q . Найти плотность поверхностного заряда σ_S и потенциал, если шар испытал малую квадрупольную деформацию: $R(\theta) = R_0 \cdot (1 + \lambda \cdot P_2(\cos\theta))$ с точностью до линейных по λ членов.

Задание 18. ЭЛЕКТРОСТАТИКА ДИЭЛЕКТРИКОВ.

18.1. Найти емкость единицы длины коаксиального кабеля с внутренним радиусом a и внешним радиусом b .

18.2. Решить задачу 18.1, проводя минимизацию энергии прямым вариационным методом. В качестве пробной функции для потенциала выбрать параболу. Сравнить с точным решением при $b/a = 1,01; 1,1; 2; 10$.

18.3. Заряд q расположен на расстоянии a от плоской границы раздела двух полупространств с диэлектрическими проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 . Найти потенциал и силу действующую на заряд.

18.4. Шар радиуса R с диэлектрической проницаемостью ϵ помещен в однородное внешнее электрическое поле \vec{E}_0 . Найти потенциал.

18.5. Найти силу и потенциальную энергию взаимодействия незаряженного диэлектрического шара радиуса R и удаленного от его центра на расстояние r точечного заряда e ($r \gg R$).

18.6. В бесконечном диэлектрике с проницаемостью ϵ имеется шаровая полость радиуса R , в центре которой помещен точечный диполь \vec{p} . Найти потенциал φ .

18.7. В шаре радиуса R с диэлектрической проницаемостью ϵ свободные заряды распределены по закону: $\rho = \rho r \cos\theta$. Найти потенциал.

Задание 19. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ДИЭЛЕКТРИК ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ.

19.1*. Диэлектрический шар радиуса R с проницаемостью ϵ , находящийся во внешнем однородном поле \vec{E}_0 , разрезан на две половины плоскостью, перпендикулярной полю. Определить силы, действующие на полушария.

19.2. Диэлектрический цилиндр длины L и радиуса R , ($R \ll L$), с проницаемостью ϵ помещен во внешнее поле \vec{E}_0 , направленное под углом θ к оси. Найти момент силы, действующей на цилиндр.

19.3. Найти высоту поднятия жидкости с плотностью массы ρ_m и диэлектрической проницаемостью ϵ между пластинами плоского конденсатора, опущенными в жидкость, если между ними поддерживается постоянная разность потенциалов V , а расстояние между пластинами равно d .

Задание 20. СТАЦИОНАРНЫЕ ТОКИ В ПРОВОДНИКАХ.

20.1. Найти закон преломления линий тока на границе раздела двух сред. Найти плотность поверхностных зарядов.

20.2. Найти плотность объемных зарядов в неоднородном проводнике с током.

20.3. В плохо проводящую среду (например, электролит) опущены хорошо проводящие стержни. Известны потенциал каждого стержня и полный стекающий с него ток. Найти джоулево тепло, выделяющееся за единицу времени.

20.4. Найти сопротивление заземления между шарами с радиусами a и b , расположенными на большом расстоянии L , ($L \gg a \sim b$), и помещенными в плохо проводящую среду с проводимостью σ .

20.5. Найти векторный потенциал и магнитное поле бесконечно длинного прямого провода с током J , равномерно распределенным по сечению проводника (цилиндр радиуса R). Найти также скалярный потенциал магнитного поля вне проводника.

Задание 21. ИНДУКТИВНОСТЬ. СИЛЫ И ЭНЕРГИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ.

21.1. Вычислить коэффициент самоиндукции единицы длины коаксиального кабеля.

21.2. Вычислить энергию взаимодействия прямого провода с током J_1 , параллельного оси x , и квадратной рамки с током J_2 . Провод параллелен оси рамки, но лежит вне плоскости рамки. Длина стороны рамки $2a$, ее центр масс имеет координаты $\{0, y_0, z_0\}$. Найти взаимную индукцию L_{12} , силу и момент силы.

21.3. Вычислить индуктивность тороидального соленоида прямоугольного сечения; кругового сечения при $a \ll R$.

21.4. Найти давление на поверхность и силу (на единицу длины), растягивающую обмотки тороидального соленоида с прямоугольным се-

чением, если по нему течет ток J , а полное число витков N .

21.5. Найти взаимную индукцию тонких коаксиальных колец с радиусами a и b , лежащих в параллельных плоскостях. Расстояние между плоскостями h . Рассмотреть случай $h \gg a \sim b \gg r$, где r - толщина провода.

Задание 22. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА.

Задание 23. СКИН-ЭФФЕКТ.

23.1. Проводящий шар (радиуса R , проводимостью σ) помещен во внешнее однородное магнитное поле $\vec{H}_0 \cos(\omega t)$. Найти магнитный момент шара μ и интенсивность излучения I , если $\delta \ll R \ll c/\omega$, где δ - толщина скин-слоя.

23.2*. В задаче 23.1 найти тепло, выделяющееся за единицу времени.

23.3 Решить задачу 23.1 для случая $R \ll \delta \ll c/\omega$.

23.3а. Проводящий шар (радиуса R , проводимостью σ) помещен во внешнее однородное магнитное поле, постоянное по модулю и вращающееся с частотой ω , $\vec{\omega} \perp \vec{H}$. Найти момент сил, действующих на шар, если $R \ll \delta \ll c/\omega$.

23.4. Сравнить сопротивление и индуктивность единицы длины цилиндрического провода радиуса a в случаях слабого и сильного скин-эффекта.

Задание 24. КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ЯВЛЕНИЯ.

24.1. Тонкий провод с током $J_0 \cos(\omega t)$ расположен параллельно плоской поверхности идеального проводника на расстоянии a от нее. Найти поле и распределение токов на поверхности проводника при $\delta \ll a$.

24.2. Внутри проводника имеется цилиндрическая полость радиуса R , в которой по тонкому прямому проводу параллельно оси на расстоянии d от нее протекает переменный ток $J_0 \cos(\omega t)$. В приближении идеального ($\delta \ll d < R$) проводника найти плотность тока на поверхности полости.

24.3*. На большом расстоянии a от плоской поверхности идеального проводника расположен круговой контур радиуса r , по которому протекает переменный ток $J_0 \cos(\omega t)$. Найти распределение токов на поверхности проводника.

Задание 25. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ДВИЖУЩИХСЯ СРЕД.

25.1. Диэлектрический шар (радиус R , $\mu = 1$, $\epsilon \neq 1$) движется в однородном постоянном электрическом поле \vec{E}_0 со скоростью \vec{v} , $v \ll c$.

Найти создаваемое им магнитное поле.

25.2. Проводящий цилиндр радиуса R , высоты h вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω в однородном постоянном магнитном поле $\vec{B} \perp \vec{\omega}$. Оценить момент сил (при $h \gg R$, $\delta \gg R$), необходимых для поддержания равномерного вращения.

25.3. Нейтральный проводящий цилиндр радиуса R вращается с угловой скоростью ω в постоянном магнитном поле $\vec{B} \parallel \vec{\omega}$. Определить разность потенциалов между точкой на оси цилиндра и точкой на его боковой поверхности. Найти распределение зарядов в цилиндре.

25.4. Идеально проводящая жидкость помещена между двумя плоскостями $z = 0$ и $z = a$ и находится в постоянном магнитном поле \vec{B}_0 , параллельном оси Z . Предполагается, что в начальный момент времени поле внутри жидкости совпадает с внешним полем, а начальная скорость направлена по оси X и равна $v_0 \sin(\pi z/a)$. Определить дальнейший закон движения жидкости.

Задание 26. КОМПЛЕКСНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ.

26.1. Пользуясь соотношениями Крамерса-Кронига, найти действительную часть $\epsilon'(\omega)$ диэлектрической проницаемости по ее мнимой части

$$\epsilon''(\omega) = (\epsilon_0 - 1) \cdot \frac{\omega\nu}{\omega^2 + \nu^2},$$

где ϵ_0 и ν – постоянные параметры.

26.2. Связь между \vec{D} и \vec{E} в материальной среде, состоящей из твердых диполей, может быть записана в виде

$$\vec{D}(t) = \vec{E}(t) + \frac{4\pi\kappa}{\tau} \cdot \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau}\right) \cdot \vec{E}(t') \cdot dt',$$

где κ и τ – константы. Найти $\epsilon(\omega)$ для такой среды.

26.3. Получить выражение для тензора диэлектрической проницаемости разреженного газа из нейтральных одноэлектронных атомов, помещенного во внешнее однородное постоянное магнитное поле \vec{B}_0 . Воспользоваться осцилляторной моделью.

Задание 27. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА.

Задание 28. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СРЕДАХ И ИХ ОТРАЖЕНИЕ ОТ ПЛОСКИХ ГРАНИЦ.

28.1. Пользуясь осцилляторной моделью, выяснить, при каких условиях в полностью ионизированном разреженном газе возможно распространение продольных электромагнитных колебаний. Принять $\mu = 1$, диссипациями пренебречь.

28.2. Плоская монохроматическая волна распространяется вдоль оси z в веществе, для которого ненулевые компоненты комплексного тензора диэлектрической проницаемости имеют вид: $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_1$, $\varepsilon_{33} = \varepsilon_2$, $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = i\varepsilon_3$. Найти фазовую скорость этой волны.

28.3. То же для волны, распространяющейся перпендикулярно к оси z .

28.4. Белый свет отражается от поверхности вещества, для которого в рассматриваемой области частот $\epsilon''(\omega) = 0$,

$$\epsilon'(\omega) = 1 + \frac{f}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2},$$

где $f \ll \omega_0^4$. Найти спектральный состав отраженного света для случаев нормального и наклонного падения.

28.5. Плоская волна частоты ω_0 падает из вакуума по нормали на границу диэлектрика, движущегося с постоянной скоростью V перпендикулярно границе. Найти коэффициент отражения и частоту отраженной волны.

ЭКЗАМЕН